Strukturen, Figuren und Abbildungen
Ein Zusammenspiel von Konkreter Kunst und Mathematik

Jürgen Roth

Zusammenfassung. In der Konkreten Kunst spielt die Visualisierung von mathematischen Ideen eine große Rolle. Konkrete Künstler nutzen u. a. mathematische Strukturen, Figuren und Abbildungen um ihre Kunstwerke zu konzipieren und legen in der Regel Wert darauf, dass der Betrachter sich diese Gestaltungsprinzipien wieder erschließen kann. Am Beispiel des Kunstwerks „Fünfzehn systematische Farbreihen mit vertikaler und horizontaler Verdichtung" von Richard Paul Lohse wird exemplarisch dargestellt, wie sich die strukturgebende Mathematik anhand eines Kunstwerks rekonstruieren lässt. Diese kann für den Mathematikunterricht aller Jahrgangsstufen gewinnbringend sein.

Konkrete Kunst und Mathematik

Die Kunst des 20. Jahrhunderts ist geprägt durch eine enge Beziehung zur Mathematik. Gerade in der Konkreten Kunst wird diese Wechselwirkung mit der Mathematik besonders intensiv. Max Bill, einer ihrer bekanntesten Vertreter, ist der „auffassung, es sei möglich, eine kunst weitgehend aufgrund einer mathematischen Denkweise zu entwickeln." (Bill, 1977) Demzufolge spielen in der Konkreten Kunst insbesondere Visualisierungen von *mathematischen* Ideen eine große Rolle. Konkrete Künstler nutzen u. a. mathematische Strukturen, Figuren und Abbildungen um ihre Kunstwerke zu konzipieren und legen in der Regel Wert darauf, dass der Betrachter sich diese Gestaltungsprinzipien wieder erschließen kann.

> *„es ist nötig immer wieder zu betonen, daß eines der wesentlichen merkmale des menschen das denken ist. das denken ermöglicht es auch, gefühlswerte in einer weise zu ordnen, daß daraus kunstwerke entstehen. das urelement jeden bild-werkes aber ist die geo-metrie, die beziehung der lagen auf der fläche oder im raum, und so, wie die mathematik eines der wesentlichen mittel zu primärem denken und damit zum erkennen der umwelt ist, so ist sie auch in ihren grundelementen eine wissenschaft der verhältnisse, des verhaltens von ding zu ding, von gruppe zu gruppe, von bewegung zu bewegung. und weil sie diese grundlegenden dinge in sich schließt und sie sinnvoll in beziehung setzt, ist es naheliegend, daß solche ereignisse auch dargestellt werden, bild werden."*
>
> *Max Bill (1949 zitiert nach Jacobi 1999, S. 74)*

Hieraus ergibt sich eine interessante Wechselwirkung zwischen Mathematik und Konkreter Kunst: Einerseits werden mathematische Ideen vom

Künstler zur Konzeption des Kunstwerks genutzt und andererseits erleichter eine mathematische Betrachtungsweise die Analyse des Kunstwerks.

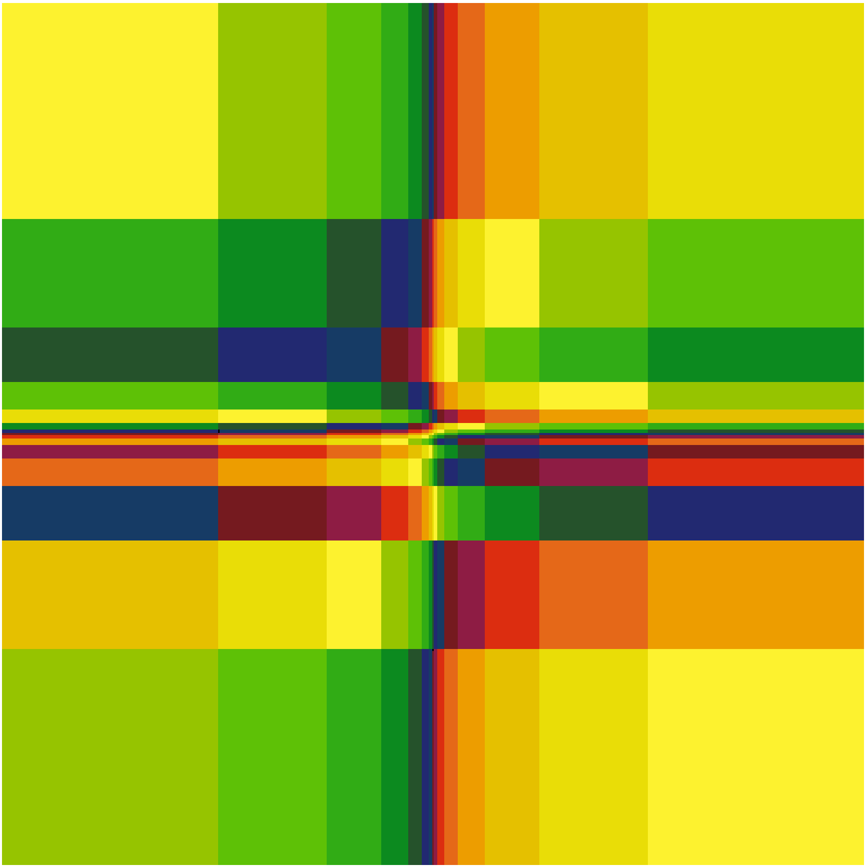

Abb. 1: Richard Paul Lohse, Fünfzehn systematische Farbreihen mit vertikaler und horizontaler Verdichtung, 1950-67, Öl auf Leinwand (Nachkonstruktion mit DGS durch den Autor – vgl. www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/) – Eine großformatige Abbildung des Originalkunstwerks findet man etwa in Lauter/Weigand (2007, S. 123)

Neben dem bereits zitierten Künstler Max Bill (*1908, †1994) ist auch Richard Paul Lohse (*1902, †1988) ein herausragender Vertreter der Konkreten Kunst. Lohse publiziert 1947 in einem Ausstellungskatalog des Kunsthauses Zürich den Text „Die Entwicklung der Gestaltungsgrundlagen der Konkreten Kunst“. Darin wird deutlich, dass Konkrete Kunstwerke nach strengen (mathematischen) Regeln geplant werden. Typisch für Werke, die auf mathematischen Grundlagen basieren, also von nachvollziehbaren methodischen Grundlagen ausgehen und nach Bogner (2008) einen Kernbereich der Konkreten Kunst bilden, ist das Bild „Fünfzehn systematische Farbreihen mit vertikaler und horizontaler Verdichtung" von Richard Paul Lohse (vgl. Abb. 1). Es wird im Folgenden exemplarisch unter einer mathematischen Perspektive analysiert.

Einfache geometrische Figuren als Grundbausteine

Lohses Bild ist, wie viele Werke der Konkreten Kunst, auf der Grundlage von wenigen einfachen geometrischen Figuren konzipiert. Hier ist wie so oft das Quadrat der wesentliche Grundbaustein. Bei näherer Betrachtung (vgl. Abb. 2) fällt auf, dass nicht nur das Bildformat quadratisch ist. Vielmehr setzt sich das ganze Gemälde, ausgehend von einem innersten Quadrat, aus Quadraten zusammen, deren Zwischenräume von Rechtecken ausgefüllt werden.

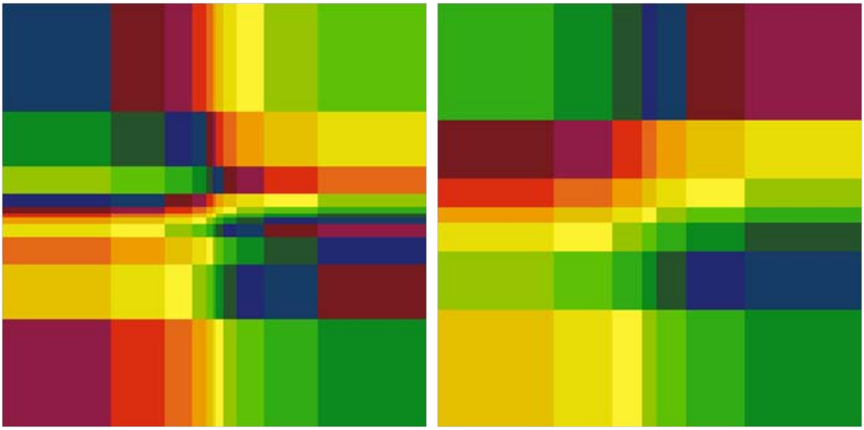

Abb. 2: Detailvergrößerung des Bildzentrums (zwei Zoomstufen) von Abb. 1

Wie entsteht das Kunstwerk aber aus diesen Grundbausteinen, den Quadraten? Wie ist es konstruiert? Eine mögliche Betrachtungsweise ist die, dass das Bild ausgehend vom innersten zentralen Quadrat (vgl. Abb. 2, rechte Seite) von konzentrischen Quadraten erzeugt wird (vgl. Abb. 3 linke Seite). Eine andere Sichtweise ergibt sich aus der Erkenntnis, dass die Bilddiagonalen von Quadraten gebildet werden. Dies lässt sich dann am leichtesten erkennen, wenn man diese Quadrate von ihrer Farbe befreit (vgl. Abb. 3 rechte Seite).

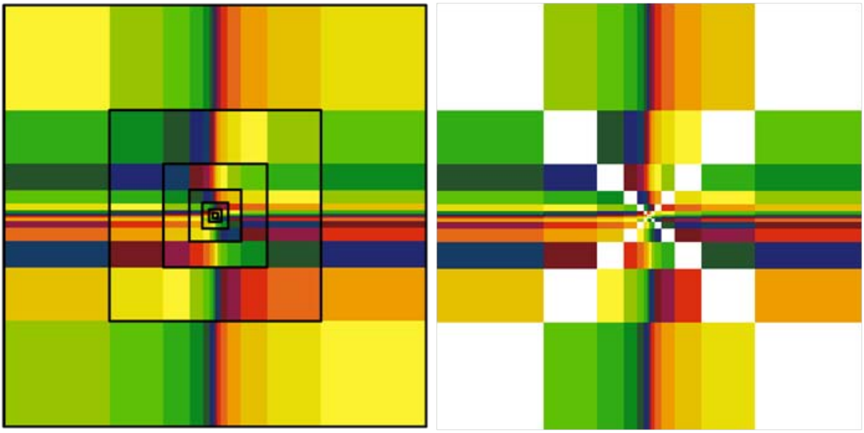

Abb. 3: Quadrate als Grundbausteine des Kunstwerks

Konstruktion des Bildes durch Abbildungen – Zentrische Streckungen

Wenn die Grundbausteine (hier die Quadrate) identifiziert sind, stellt sich die Frage, wie auf dieser Basis das Bild konzipiert wurde. Ein Zugang, den wohl auch Richard Paul Lohse gewählt hat, ergibt sich über die Quadrate auf den Bilddiagonalen. Die Kantenlängen dieser Quadrate werden zur Mitte hin bis zum zentralen kleinsten Quadrat, das man als Keimzelle des Gemäldes betrachten kann, immer kleiner (vgl. Abb. 4).

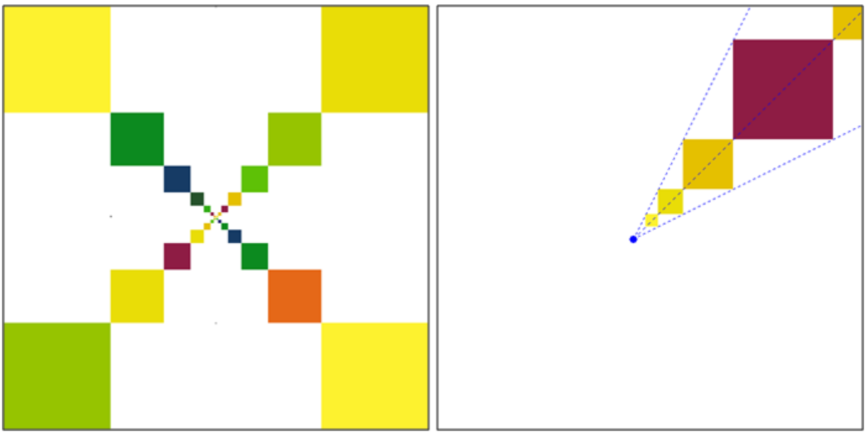

Abb. 4: Quadrate auf den Bilddiagonalen

Eine zentrische Streckung der „Keimzelle“ mit dem Streckungsfaktor 2, bei der die linke untere Ecke des zentralen kleinsten Quadrats auf die rechte obere Ecke abgebildet wird, liefert das nächste Quadrat rechts oberhalb des zentralen Quadrats. Dessen Seiten sind gerade doppelt so lang wie die des zentralen Quadrats. Durch Verbindung entsprechender Ecken der beiden Quadrate findet man das zugehörige Streckungszentrum (vgl. Abb. 4, rechte Seite). Dieses Streckungszentrum ist für alle Quadrate auf der Bilddiagonalen rechts oberhalb des zentralen Quadrats zuständig. Das jeweils nächste Quadrat hat immer die doppelte Kantenlänge des vorhergehenden Quadrats. Damit ergeben sich die Streckungsfaktoren $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ bzw. $2^7 = 128$. Führt man nach diesem Schema zentrische Streckungen des zentralen Quadrats nach links oben, links unten und rechts unten durch, so hat man die Quadratdiagonalen erzeugt. Verlängert man die Seiten dieser Quadrate auf den Diagonalen bis zum Bildrand, so entsteht die gesamte Bildstruktur. Diese besitzt, wenn man von den Farben absieht, die gleichen Symmetrieeigenschaften wie das Quadrat (vgl. Abb. 5).

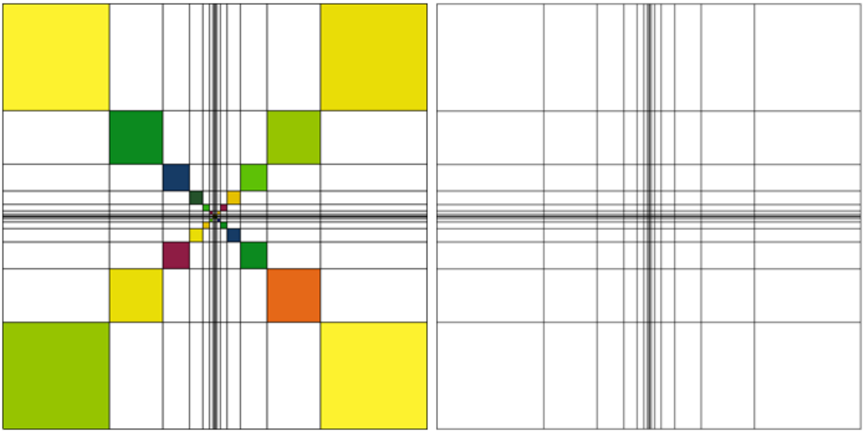

Abb. 5: Verlängerung der Quadratseiten bis zum Bildrand erzeugt die Binnenstruktur des Bildes, die dieselben Symmetrieeigenschaften wie das Quadrat besitzt

Eine ganz andere Idee besteht darin, das Bild durch zentrische Streckungen des zentralen Quadrats bzgl. der Bildmitte als Streckungszentrum zu konstruieren. Dadurch kann man zu den in Abb. 3 (linke Seite) schwarz umrandeten Quadraten kommen. Verlängert man die Seiten der so entstandenen Quadrate bis zum Bildrand, so entsteht auch hier wieder die gesamte Bildstruktur. Um die erwähnten zentrischen Streckungen bzgl. der Bildmitte als Streckungszentrum konkret auszuführen, werden die Streckungsfaktoren benötigt, bzgl. derer die größeren Quadrate aus dem kleinsten zentralen Quadrat entstehen. Diese Streckungsfaktoren erhält man, wenn man das Verhältnis der Seitenlänge des jeweils betrachteten Quadrats zur Seitenlänge des kleinsten zentralen Quadrats bestimmt. Setzt man die Länge des kleinsten Quadrats gleich eins, so entsprechen diese Längenverhältnisse den Seitenlängen der größeren Quadrate.

Algebraische Strukturen in Kunstwerken entdecken – Zahlenfolgen

Für die Quadratseitenlängen erhält man von innen nach außen

1, 5, 13, 29, 61, 125, 253 und 509.

Bei der Untersuchung der Beziehung zwischen den Gliedern dieser Zahlenfolge, kann man auf verschiedene Zusammenhänge kommen. So ist fünf etwa das Doppelte von eins plus drei. Dreizehn ist das Doppelte von fünf plus drei und so weiter (vgl. Abb. 6). Damit erhält man eine rekursive Formel für die Folgeglieder: Die Seitenlänge s_1 des ersten (kleinsten) Quadrats beträgt $s_1 = 1$ und für die Seitenlänge des (n+1)-ten Quadrats ergibt sich:

$$s_{n+1} = 2s_n + 3 \quad (*)$$

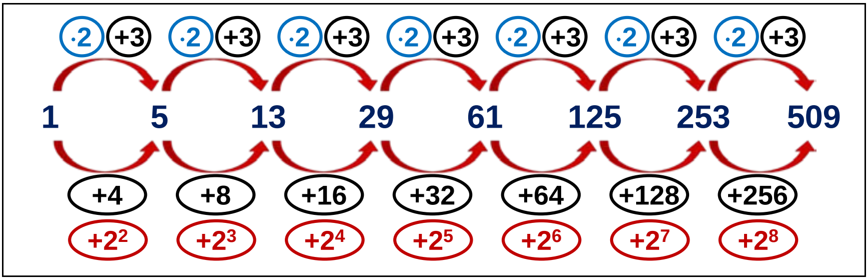

Abb. 6: Folge der Kantenlängen der schwarz umrandeten Quadrate – Zusammenhang zwischen den Folgegliedern

Daneben lässt sich aber auch noch eine andere rekursive Formel für die Folgeglieder erarbeiten. Fünf ist gleich eins plus $4 = 2^2$, dreizehn ist gleich fünf plus $8 = 2^3$ und so weiter (vgl. Abb. 6). Mit $s_1 = 1$ ergibt sich daraus

$$s_{n+1} = s_n + 2^{n+1} \quad (**).$$

Wenn beide rekursiven Formeln (*) und (**) stimmen, dann folgt:

$$2s_n + 3 = s_{n+1} = s_n + 2^{n+1}$$

Also gilt: $$s_n = 2^{n+1} - 3$$

Dies ist eine explizite Formel für die Seitenlänge des *n*-ten Quadrats! Mit wenigen Überlegungen wurde hier eine Struktur des Gemäldes offengelegt, die wahrscheinlich nicht einmal dem Künstler bewusst war.

Warum gelten aber die rekursiven Beziehungen (*) und (**) zwischen den Seitenlängen der konzentrischen Quadrate? Eine Deutung dieses Phänomens gelingt, wenn man die beiden Perspektiven auf die Grundbausteine des Kunstwerks, nämlich die Quadrate, miteinander verbindet. Die Erkenntnis über die Erzeugung der Quadrate auf den Diagonalen des Bilds mittels zentrischer Streckung des kleinsten zentralen Quadrats ermöglicht ein Verständnis der beiden oben erarbeiteten rekursiven Formeln (*) und (**). Projiziert man nämlich die Quadrate auf den Diagonalen und die konzentrischen Quadrate mit schwarzem Rand wie in Abb. 7 übereinander, so lassen sich die Beziehungen relativ leicht einsehen.

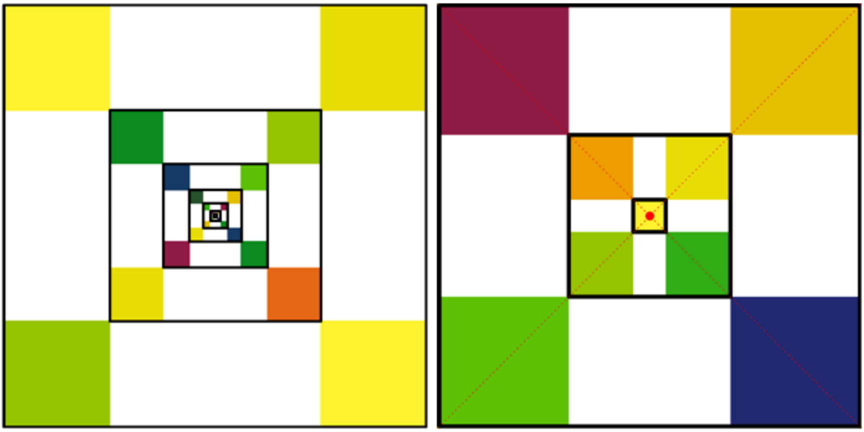

Abb. 7: Zusammenhang zwischen den Kantenlängen der auf der linken Seite der Abb. 3 schwarz umrandeten Quadrate

Auf der rechten Seite von Abb. 7 sind die innersten drei der konzentrischen Quadrate dargestellt. Für die Quadrate auf den Diagonalen gilt, dass ihre Kantenlänge sich von innen nach außen von Quadrat zu Quadrat jeweils verdoppelt. Zunächst soll die Gültigkeit der rekursiven Formel (*), also von $s_{n+1} = 2s_n + 3$ überprüft werden. Verdoppelt man die Kantenlänge des innersten Quadrats, so erhält man die Kantenlänge des nächsten Quadrats auf der Diagonale rechts oberhalb des innersten Quadrats. Zur Kantenlänge des nächsten schwarz umrandeten konzentrischen Quadrats fehlen aber noch die Kantenlänge des innersten Quadrats (1) und die die Kantenlänge des nächsten Quadrats auf der Diagonalen links oberhalb des innersten Quadrats ($2 \cdot 1 = 2$). Zur Verdopplung der

Kantenlänge des vorhergehenden Quadrats müssen also noch drei Kantenlängen des innersten Quadrats hinzugefügt werden, um die Kantenlänge des nächsten schwarz umrandeten Quadrats zu erhalten. Bereits beim nächsten Schritt wird deutlich, dass sich dies jeweils wiederholt.

Beim Übergang vom zweiten zum dritten schwarz umrandeten Quadrat wird zuerst die Kantenlänge des zweiten Quadrats verdoppelt. Dies soll abschnittsweise geschehen. Zunächst führt die Verdopplung der Kantenlängen der beiden beteiligten Quadrate auf den Diagonalen jeweils zu den Kantenlängen der beiden nächstgrößeren Diagonalenquadrate. Anschließend wird das zum weißen Feld gehörende Kantenstück verdoppelt (vgl. Abb. 7). Da es sich hier aber um die Länge der Kante des kleinen zentralen Quadrats handelt, erhält man damit wieder die Kantenlänge des nächsten Quadrats auf der Diagonale rechts oberhalb des innersten Quadrats. Wie beim ersten Schritt fehlen auch hier wieder die Kantenlänge des innersten Quadrats (1) und die Kantenlänge des nächsten Quadrats auf der Diagonalen links oberhalb des innersten Quadrats (2·1=2) bis zur Kantenlänge nächsten konzentrischen Quadrats. Zur Verdopplung der Kantenlänge des vorhergehenden Quadrats müssen also noch drei Kantenlängen des innersten Quadrats hinzugefügt werden, um die Kantenlänge des nächsten schwarz umrandeten Quadrats zu erhalten. Geht man weiter so vor, so bleibt nach Verdopplung der vorhergehenden Kantenlänge immer die gleiche Lücke der Länge 3 bis zur Kantenlänge des nächsten Quadrats. Insgesamt ergibt das die Formel $s_{n+1} = 2s_n + 3$.

Die rekursive Formel (**), also $s_{n+1} = s_n + 2^{n+1}$ ist noch leichter einzusehen. Aus Abb. 7 wird deutlich, dass zur Kantenlänge eines schwarz umrandeten konzentrischen Quadrats zwei Kantenlängen gleichgroßer Diagonalenquadrate hinzukommen. Die Kantenlängen der Diagonalenquadrate sind bekanntlich Zweierpotenzen. Dabei gilt für die Kantenlänge d_1 des ersten Diagonalenquadrats, das gleichzeitig das innerste konzentrische Quadrat ist: $d_1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$. Jedes weitere Quadrat auf der Diagonalen besitzt eine Kantenlänge, die doppelt so groß wie die des vorherigen Quadrats ist. Damit gilt $d_2 = 2 \cdot d_1 = 2 \cdot 2^0 = 2 \cdot 2^{1-1} = 2^{2-1}$. Allgemein ergibt sich $d_n = 2^{n-1}$. Für die Kantenlänge s_{n+1} des (n+1)-ten Diagonalenquadrats ergibt sich damit: $s_{n+1} = s_n + 2 \cdot d_{n+1} = s_n + 2 \cdot 2^{(n+1)-1} = s_n + 2^{n+1}$.

Die Farbgebung – Kombinatorische und kreative Aspekte

Wie kommen die Farben ins Spiel? Durch die Verlängerung der Seiten der Quadrate auf den Diagonalen bis zum Bildrand entstehen fünfzehn Zeilen und fünfzehn Spalten, deren Breite bzw. Höhe sich zur Mitte hin von Schritt zu Schritt jeweils halbieren (vgl. Abb. 5). In jeder Zeile und Spalte stehen damit fünfzehn Felder zur Verfügung, die mit Farben gefüllt werden können. Wie geht der Künstler vor, um die Felder mit Farben zu füllen? Eine genaue Betrachtung der Bildzeilen in Abb. 1 macht deutlich, dass Richard Paul Lohse in jeder Reihe dieselben fünfzehn Farben einer von Ihm gewählten Farbpalette (vgl. Abb. 8) einsetzt.

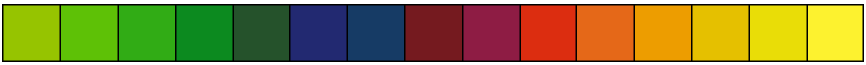

Abb. 8: Die fünfzehn Farben der vom Künstler ausgewählten Farbpalette

Für jede der fünfzehn Farben dieser Farbpalette steht pro Zeile genau ein Feld zur Verfügung. Diese wird vom Künstler wie ein endloses Band behandelt, d. h. der linke und rechte Rand der abgebildeten Palette werden als verbunden betrachtet. Lohse behält die Reihenfolge der Farben bei. Er legt in jeder Zeile für das erste Feld die Farbe fest, wodurch die Farbgebung der anderen Felder der Zeile sich automatisch durch eine entsprechende zyklische Verschiebung der Farbpalette ergibt. Um das Kunstwerk interessanter zu gestalten, sollte eine Farbe, die bereits einmal als erste Farbe gewählte wurde, bei keiner weiteren Zeile als Anfangsfarbe gesetzt werden. Auf diese Weise lassen sich durch kreative Wahl der Anfangsfarben sehr unterschiedliche visuelle Eindrücke erzeugen. Mit Hilfe einer Flash-Animation von Jan Wörler kann das Bild unter www.dmuw.de/projekt/woerler/pages/lohse/lohse_index.htm durch zeilenweises Verschieben der Farbpaletten kreativ umgestaltet werden. Es ist faszinierend zu beobachten, wie sich dadurch der Gesamteindruck des Kunstwerks vollständig verändern kann.

Wie viele verschiedene Kunstwerke könnte Richard Paul Lohse alleine dadurch erzeugen, dass er wie oben beschrieben, die Farbanordnungen des Bildes verändert? Könnte jeder Deutsche oder sogar jeder Erdenbürger auf diese Weise sein ganz individuelles Kunstwerk von Richard Paul Lohse erhalten? Neben dieser Frage eröffnen sich hier, z. B. durch individuell gesetzte Randbedingungen bzgl. der Farbwahl, für den Unterricht weitere Möglichkeiten für reizvolle kombinatorische Probleme.

Anmerkungen zur Umsetzung im Unterricht

Für den Unterricht aller Jahrgangsstufen bietet die Rekonstruktion der mathematischen Grundlagen von Konkreten Kunstwerken ein enormes Potential für die Anwendung von Fähigkeiten und Fertigkeiten aus der Geometrie, aber auch aus der Arithmetik und Algebra. Wesentlich dabei ist eine Herangehensweise, die den Schülerinnen und Schülern selbstständige Entdeckungen ermöglicht und zum Hinterfragen der entdeckten Zusammenhänge einlädt. Hier können auf dynamischen Geometriesystemen basierende dynamische Arbeitsblätter die Arbeit im Klassenverband unterstützen. Sie ermöglichen eine ungezwungene Auseinandersetzung mit dem Kunstwerk sowie dynamische Untersuchungen von Zusammenhängen, die durch einfaches Ziehen von Schiebereglern beobachtet und analysiert werden können. Auf diese Weise entwickeln viele Schülerinnen und Schüler selbstständig Ideen zur mathematischen Begründung von entdeckten bzw. vermuteten Zusammenhängen. Auf der Seite www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/ finden sich dynamische Arbeitsblätter zu verschiedenen Kunstwerken der Konkreten Kunst, darunter auch zwei zu Richard Paul Lohses Kunstwerk „Fünfzehn systematische Farbreihen mit vertikaler und horizontaler Verdichtung“.

Hat man die mathematischen Grundlagen (hier z. B. Folgen, zyklische Vertauschungen, das Quadrat als grundlegendes Gestaltungselement und zentrische Streckungen als strukturvermittelnde Abbildungen) eines Kunstwerks erst einmal rekonstruiert, dann kann man mit ihrer Hilfe das Kunstwerk umgestalten und kreativ weiterentwickeln (vgl. Roth 2007). Damit schließt sich der Kreis und der Betrachter wird selbst zum Gestalter mathematischer Ideen…

Literatur

Bill, M. (1977). die mathematische denkweise in der kunst unserer zeit. In E. Hüttinger, Max Bill. Zürich. S. 105-116

Bogner, D. (2008). „… wie das Schachspiel im Café“. In: W. Drechsler. Genau und anders - Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt. Nürnberg. S. 96-117

Drechsler, W. (2008a). Ein ungenaues Quadrat und mögliche Folgen. In: W. Drechsler. Genau und anders - Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt. Nürnberg. S. 80-95

Drechsler, W. (2008b). Genau und anders. In: W. Drechsler. Genau und anders - Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt. Nürnberg. S. 8-17

Guderian, D. (1990): Mathematik in der Kunst der letzten dreißig Jahre. Ebringen i. Br.

Jacobi, F. (1999): Geometrie als Gestalt – Strukturen der modernen Kunst von Albers bis Piak. Werke der Sammlung DaimlerChrysler. Berlin.

Lauter, M.; Weigand, H.-G. (2007). Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst. Baunach

Roth, J. (2007): Konkrete Kunst und Bewegung – Mathematik als Kreativitäts- und Interpretationswerkzeug. In: M. Lauter, H.-G. Weigand (Hrsg.). Ausgerechnet ... Mathematik und Konkrete Kunst. Baunach. S. 22-28.