

Max Bill: Strahlung aus Rot

Berechnung der Flächeninhalte der Teilflächen

Die Diagonale d des großen Quadrats ist doppelt so lang, wie die Kantenlänge a des kleinen Quadrats. (Warum?)

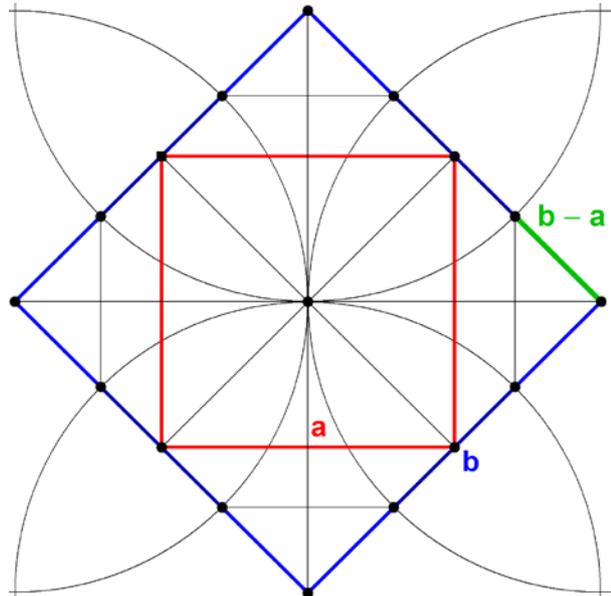
$$d = 2a$$

b ist die Kantenlänge des großen Quadrats und gleichzeitig die Länge der Diagonalen des kleinen Quadrats. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$b = \sqrt{a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{2}, \text{ d.h. } a = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Der Abbildung lässt sich entnehmen (vgl. die eingezeichneten Kreisbögen mit Radius a), dass die grüne Kathete des kleinen rechtwinkligen Dreiecks folgende Länge besitzt:

$$b - a = \begin{cases} a \cdot \sqrt{2} - a = (\sqrt{2} - 1) \cdot a \\ b - \frac{b}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot b \end{cases}$$



Daraus ergeben sich die Flächeninhalte für die Teilflächen des Kunstwerks (in Abhängigkeit von a bzw. b):

- Flächeninhalt des kleinen Quadrats: $A_{\text{kleines Quadrat}} = \begin{cases} a^2 \\ \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{b^2}{2} \end{cases}$
- Flächeninhalt des großen Quadrats: $A_{\text{großes Quadrat}} = \begin{cases} (a \cdot \sqrt{2})^2 = 2a^2 \\ b^2 \end{cases}$
- Flächeninhalt des kleinen gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks:

$$A_{\text{kleines Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot (b - a)^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot (2 - 2\sqrt{2} + 1) \cdot a^2 = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot a^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot b^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot b^2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot b^2 \end{cases}$$

- Flächeninhalt des Achtecks:

$$A_{\text{Achteck}} = A_{\text{großes Quadrat}} - 4 \cdot A_{\text{kleines Dreieck}} = \begin{cases} 2a^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot a^2 = (4\sqrt{2} - 4) \cdot a^2 \\ b^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot b^2 = (2\sqrt{2} - 2) \cdot b^2 \end{cases}$$

Damit erhält man folgende Werte für die Flächeninhalte in Abhängigkeit von der jeweils im Bild vorgegebenen Seitenlänge:

$$\begin{aligned} a = 1 &\Rightarrow A_{\text{kleines Quadrat}} = 1; & A_{\text{großes Quadrat}} &= 2; & A_{\text{Achteck}} &= 4\sqrt{2} - 4 \approx 1,66 \\ a = 5 \text{ cm} &\Rightarrow A_{\text{kleines Quadrat}} = 25 \text{ cm}^2; & A_{\text{großes Quadrat}} &= 50 \text{ cm}^2; & A_{\text{Achteck}} &\approx 41,42 \text{ cm}^2 \\ b = 1 \text{ m} &\Rightarrow A_{\text{kleines Quadrat}} = 0,5 \text{ m}^2; & A_{\text{großes Quadrat}} &= 1 \text{ m}^2; & A_{\text{Achteck}} &\approx 0,83 \text{ m}^2 \end{aligned}$$