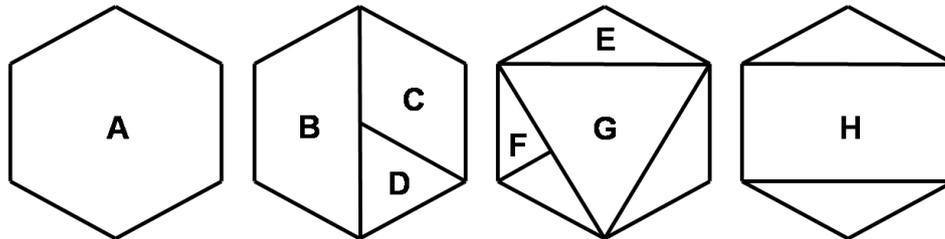


Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „EXI“

Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks

Das Anschauungsmittel besteht aus 32 Teilen (*Exis*). Mit den kleineren Teilen kann das größte *Exi*, ein regelmäßiges Sechseck (gr. Hexagon = Sechseck) auf verschiedenste Weise ausgelegt werden.



Wie in den abgebildeten Vielecken eingetragen, werden die *Exis* wie folgt bezeichnet: (Regelmäßiges) Sechseck *A*, (gleichschenkliges) Trapez *B*, Raute *C*, mittleres (gleichseitiges) Dreieck *D*, langes (stumpfwinklig-gleichschenkliges) Dreieck *E*, kleines (rechtwinkliges) Dreieck *F*, großes (gleichseitiges) Dreieck *G*, Rechteck *H*. Auch mit *Exis* kann man, wie mit Tangram-Teilen, Figuren legen und verschiedenartige Flächen auslegen. Hier werden sie aber als Werkzeug für die Bruchrechnung genutzt.

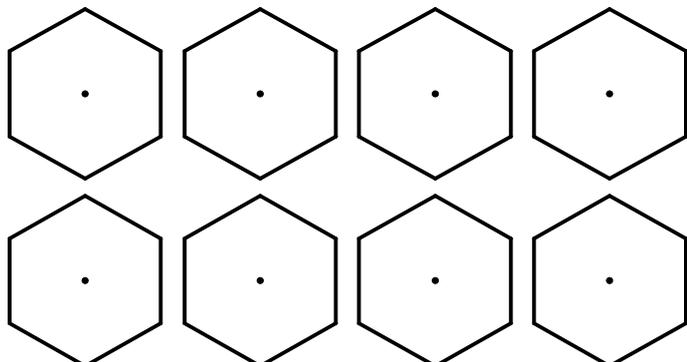
Literatur

- Roth, Jürgen: Eine geometrische Lernumgebung – Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen. In: Fritz-Stratmann, Annemarie; Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz Verlag, Weinheim, 2009, S. 186-200

Aufgaben

1) Kennenlernen des Materials – Teil eines Ganzen

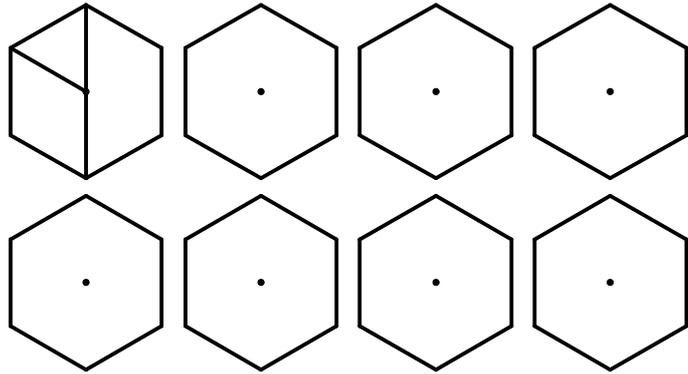
- Zählen Sie nach, wie oft jeder *Exi-Typ* im Sortiment (gleicher Farbe) vorhanden ist und tragen Sie die Anzahl in die Tabelle ein.
- Legen Sie das Sechseck *A* mit gleichen *Exis* aus. Das geht mit *B*, *C*, *D*, *E* und *F* (Anzahl eintragen) und zeichnen Sie entsprechende Trennlinien in die abgebildeten Sechsecke ein. Finden Sie für manche *Exi-Typen* verschiedene (nicht kongruente) Möglichkeiten zum Auslegen des Sechsecks?
- Welchen Bruchteil von *A* stellt ein *Exi-Typ* jeweils dar? Tragen Sie die Ergebnis Ihrer Überlegungen in die Tabelle ein.



Exi-Typ	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl der Teile								
Bruchteil von S								

2) Das Ganze zusammensetzen

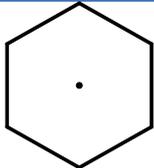
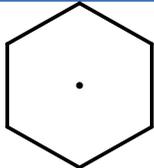
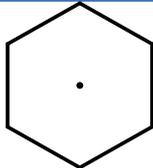
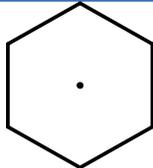
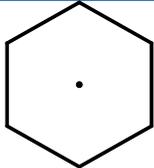
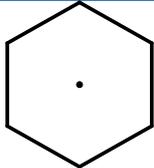
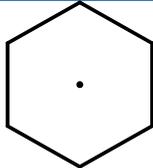
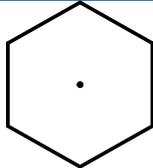
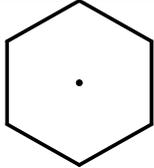
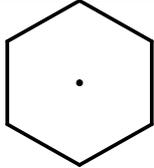
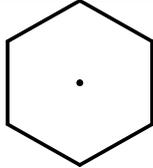
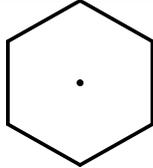
Legen Sie mit verschiedenen kleineren **Exis** das Sechseck aus. Finden Sie mehrere Möglichkeiten und zeichnen Sie diese in die Vorlage ein.



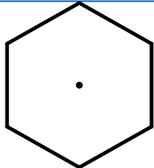
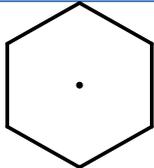
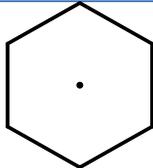
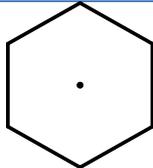
3) Erweitern und Kürzen

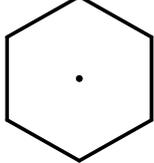
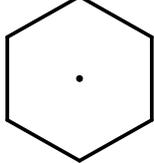
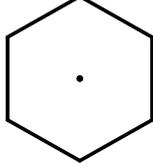
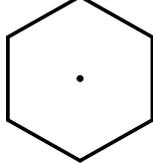
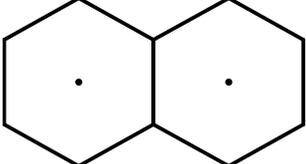
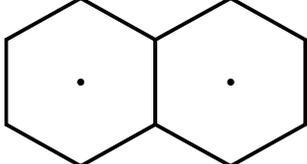
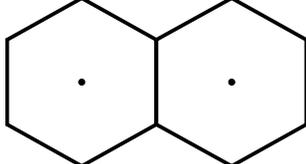
Einen Bruch **erweitern heißt**, das entsprechende Bruchstück **feiner unterteilen**, d.h. die Teilstücke werden noch einmal geteilt. Einen Bruch **kürzen heißt**, das entsprechende Bruchstück **größer unterteilen**. In jedem Fall ändert sich die Bruchzahl nicht, sondern nur die Schreibweise (der Bruch).

a) **Erweitern** Sie die folgenden Brüche unter Benutzung der **Exis**. Nehmen Sie so viele Exis, wie jeweils der Zähler der folgenden Brüche angibt. Machen Sie für jeden Fall eine Skizze am Sechseck; benutzen Sie zwei Farbstifte:

 $\frac{2}{3} = \text{---}$	 $\frac{2}{3} = \text{---}$	 $\frac{5}{6} = \text{---}$	 $\frac{1}{6} = \text{---}$
 $\frac{1}{2} = \text{---}$	 $\frac{1}{2} = \text{---}$	 $\frac{1}{3} = \text{---}$	 $\frac{1}{3} = \text{---}$
 $1 = \text{---}$	 $1 = \text{---}$	 $1 = \text{---}$	 $1 = \text{---}$

b) **Kürzen** Sie die folgenden Brüche unter Benutzung der **Exis**. Machen Sie für jeden Fall eine Skizze am Sechseck und benutzen Sie dazu zwei Farbstifte. Bei Sechsteln nimmt Partner A die gleichseitigen Dreiecke **D**, Partner B die langen stumpfwinkligen Dreiecke **E**.

 $\frac{3}{6} = \text{---}$	 $\frac{2}{6} = \text{---}$	 $\frac{4}{6} = \text{---}$	 $\frac{6}{6} = \text{---}$
---	---	--	---

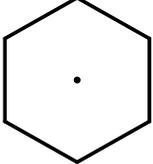
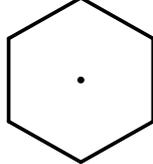
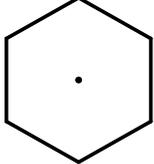
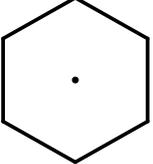
 $\frac{4}{12} = \text{---}$	 $\frac{6}{12} = \text{---}$	 $\frac{2}{12} = \text{---}$	 $\frac{10}{12} = \text{---}$
 $\frac{9}{6} = \text{---}$		 $\frac{8}{6} = \text{---}$	
 $\frac{10}{6} = \text{---}$			

c) **Vergleichen** Sie die folgenden Paare von Brüchen miteinander hinsichtlich ihrer Größe, indem Sie die **Exis** (ggf. durch Aufeinanderlegen) miteinander vergleichen. (Bitte **nicht** rechnen, kürzen oder erweitern!) Notieren Sie Ihr Ergebnis mit den Zeichen $<$, $>$ bzw. $=$.

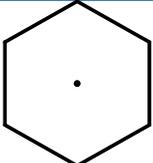
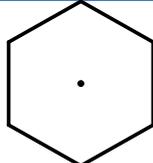
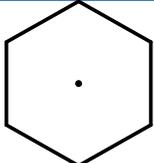
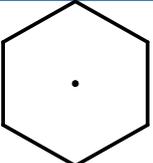
$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{4}{3}$

4) Einfache Additionen und Subtraktionen

Lösen Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie die entsprechenden **Exis** legen, und zwar so viele, wie jeweils durch den Zähler des Bruches angegeben wird. (Für $\frac{2}{3}$ legt man also z. B. zwei **C** und nicht ein **H**.) Zeichnen Sie Ihre Lösung dann mit zwei Farben in die Sechsecke ein.

 $\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \text{---}$	 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \text{---}$	 $\frac{1}{6} + \frac{3}{12} = \text{---}$	 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \text{---}$
---	---	---	---

Legen Sie das Bruchstück für den Subtrahenden auf das für den Minuenden. Schraffieren Sie die Differenz.

 $\frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \text{---}$	 $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \text{---}$	 $\frac{5}{6} - \frac{2}{12} = \text{---}$	 $\frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \text{---}$
---	---	---	--

5) Ein Exi-Teil kann verschiedene Bruchteile repräsentieren

Wir haben bisher immer das große Sechseck **A** als Einheit (Ganzes) gewählt. Damit war z. B. das kleine Dreieck **F** gleich $\frac{1}{12} \cdot A$. Es kann aber auch die Hälfte, ein Viertel, ein Sechstel usw. sein, je nachdem auf welches Ganze man es bezieht. Probieren Sie das aus, indem Sie das größere **Exi** jeweils mit dem kleineren auslegen. Zeichnen Sie anschließend Ihre Lösung in die Vorlage ein und geben Sie den jeweiligen Bruchteil an.

a) Welchen Bruchteil des abgebildeten **Exis** stellt **F** jeweils dar?



$F = \text{---} \cdot D$	$F = \text{---} \cdot E$	$F = \text{---} \cdot C$	$F = \text{---} \cdot B$	$F = \text{---} \cdot H$	$F = \text{---} \cdot G$

b) Welchen Bruchteil des abgebildeten **Exis** stellt **D** jeweils dar?



$D = \text{---} \cdot C$	$D = \text{---} \cdot B$	$D = \text{---} \cdot H$	$D = \text{---} \cdot G$

c) Welchen Bruchteil des abgebildeten **Exis** stellt **E** jeweils dar?



$E = \text{---} \cdot C$	$E = \text{---} \cdot B$	$E = \text{---} \cdot H$	$E = \text{---} \cdot G$

6) Bruch mal Bruch

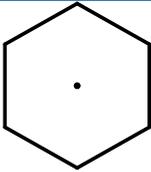
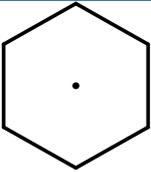
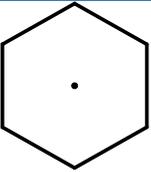
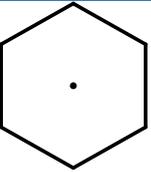
In einem Produkt wie $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ bedeutet der erste Faktor einen Operator (zwei Drittel von ...) der zweite Faktor wird durch ein **Exi** dargestellt. Zeichnen Sie das jeweilige Plättchen ein und nehmen Sie die Operation durch Einzeichnen von Trennlinien vor. Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \text{---}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \text{---}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \text{---}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \text{---}$

Betrachten Sie diese Aufgabe auch unter dem Blickwinkel der Aufgabe 5!

7) Bruch durch ganze Zahl

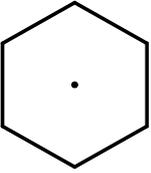
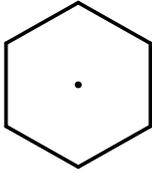
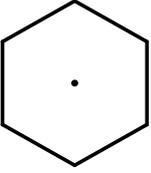
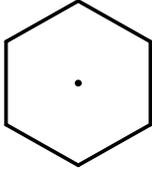
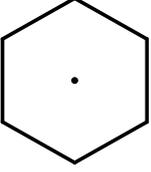
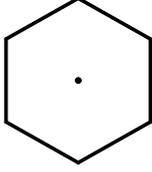
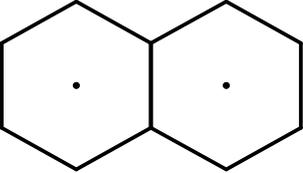
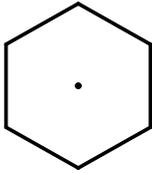
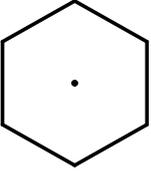
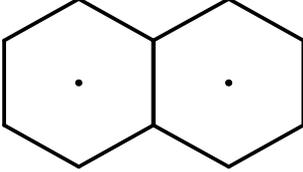
Die zweite Zahl ist jetzt der Operator. Für die erste zeichnen Sie also die entsprechenden **Exis** ein. Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

 $\frac{6}{12} : 3 = \text{---}$	 $\frac{2}{3} : 2 = \text{---}$	 $\frac{1}{2} : 6 = \text{---}$	 $\frac{2}{3} : 4 = \text{---}$
--	---	--	---

8) Bruch durch Bruch (Messen)

Die Division von Bruchzahlen lässt sich mit Hilfe des Messens verstehen. Die Bedeutung von $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ (der Divisor ist hier kleiner als der Dividend) lässt sich z. B. über folgende Frage erfassen: „Wie oft ist $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$ enthalten?“ Ist der Divisor dagegen größer als der Dividend, wie bei $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$, dann steht der Quotient für folgende Frage: „Welcher Bruchteil von $\frac{1}{2}$ ist in $\frac{1}{3}$ enthalten?“

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben nicht formal, sondern durch Vergleich geeigneter **Exis**. Schraffieren Sie jeweils einzeln entsprechende Bruchteile des Sechsecks für den Dividend und den Divisor und ergänzen Sie wo nötig wesentliche Unterteilungslinien.

$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \text{---}$		
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \text{---}$		
$\frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \text{---}$		
$\frac{3}{2} : \frac{2}{3} = \text{---}$		
$\frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \text{---}$		

9) Größenbeziehungen begründen

Begründen Sie die Größenbeziehung für die folgenden Relationen. Tun Sie das aber nicht formal, sondern unter Bezug auf die Anzahl und Größe der verwendeten *Exis*.

$$\frac{3}{12} < \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{6} > \frac{5}{12}$$

$$\frac{11}{12} > \frac{5}{6}$$