# Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „EXI“

## Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks

Das Anschauungsmittel besteht aus 32 Teilen (Exis). Mit den kleineren Teilen kann das größte Exi, ein regelmäßiges Sechseck (gr. Hexagon = Sechseck) auf verschiedenste Weise ausgelegt werden.



Wie in den abgebildeten Vielecken eingetragen, werden die Exis wie folgt bezeichnet: (Regelmäßiges) Sechseck A, (gleichschenkliges) Trapez B, Raute C, mittleres (gleichseitiges) Dreieck D, langes (stumpfwinklig-gleichschenkliges) Dreieck E, kleines (rechtwinkliges) Dreieck F, großes (gleichseitiges) Dreieck G, Rechteck H. Auch mit Exis kann man, wie mit Tangram-Teilen, Figuren legen und ver­schiedenartige Flächen auslegen. Hier werden sie aber als Werkzeug für die Bruchrechnung genutzt.

## Literatur

* Roth, Jürgen: Eine geometrische Lernumgebung – Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen. In: Fritz-Stratmann, Annemarie; Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I − Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz Verlag, Weinheim, 2009, S. 186-200

## Aufgaben

#### Kennenlernen des Materials – Teil eines Ganzen

1. Zählen Sie nach, wie oft jeder Exi-Typ im Sortiment (gleicher Farbe) vorhanden ist und tragen Sie die Anzahl in die Tabelle ein.
2. Legen Sie das Sechseck A mit gleichen Exis aus. Das geht mit \_\_B, \_\_C, \_\_D, \_\_E und \_\_F (Anzahl eintragen) und zeichnen Sie entsprechende Trennlinien in die abgebildeten Sechs­ecke ein. Finden Sie für manche Exi-Typen verschiedene (nicht kongruente) Möglichkeiten zum Auslegen des Sechsecks?
3. Welchen Bruchteil von A stellt ein Exi-Typ jeweils dar? Tragen Sie die Er­gebnis Ihrer Überlegungen in die Tabelle ein.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Exi-Typ** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **G** | **H** |
| Anzahl der Teile |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Bruchteil von **S** |  |  |  |  |  |  |  |  |

#### Das Ganze zusammensetzen

Legen Sie mit verschiedenen klei­neren Exis das Sechseck aus. Finden Sie mehrere Möglichkeiten und zeich­nen Sie diese in die Vorlage ein.

#### Erweitern und Kürzen

Einen Bruch erweitern heißt, das ent­sprechende Bruchstück feiner unter­teilen, d.h. die Teilstücke werden noch einmal geteilt. Einen Bruch kürzen heißt, das entsprechende Bruchstück gröber unterteilen. In jedem Fall ändert sich die Bruchzahl nicht, sondern nur die Schreibweise (der Bruch).

1. Erweitern Sie die folgenden Brüche unter Benutzung der Exis. Nehmen Sie so viele Exis, wie jeweils der Zähler der folgenden Brüche angibt. Machen Sie für jeden Fall eine Skizze am Sechseck; benutzen Sie zwei Farbstifte:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| $$\frac{2}{3}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{2}{3}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{5}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{6}=\frac{ }{ }$$ |
|  |  |  |  |
| $$\frac{1}{2}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{2}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{3}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{3}=\frac{ }{ }$$ |
|  |  |  |  |
| $$1=\frac{ }{ }$$ | $$1=\frac{ }{ }$$ | $$1=\frac{ }{ }$$ | $$1=\frac{ }{ }$$ |

1. Kürzen Sie die folgenden Brüche unter Benutzung der Exis. Machen Sie für jeden Fall eine Skizze am Sechseck und benutzen Sie dazu zwei Farbstifte. Bei Sechsteln nimmt Partner A die gleichseitigen Dreiecke D, Partner B die langen stumpfwinkligen Dreiecke E.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| $$\frac{3}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{2}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{4}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{6}{6}=\frac{ }{ }$$ |
|  |  |  |  |
| $$\frac{4}{12}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{6}{12}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{2}{12}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{10}{12}=\frac{ }{ }$$ |
|  |  |  |
| $$\frac{9}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{8}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{10}{6}=\frac{ }{ }$$ |

1. Vergleichen Sie die folgenden Paare von Brüchen miteinander hinsichtlich ihrer Größe, indem Sie die Exis (ggf. durch Aufeinanderlegen) miteinander vergleichen. (Bitte nicht rechnen, kürzen oder erweitern!) Notieren Sie Ihr Ergebnis mit den Zeichen <, > bzw. =.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$\frac{3}{12} \frac{5}{12}$$ | $$\frac{1}{2} \frac{1}{3}$$ | $$ \frac{5}{6} \frac{7}{12}$$ |
| $$\frac{3}{3} \frac{2}{3}$$ | $$\frac{2}{3} \frac{2}{6}$$ | $$\frac{2}{3} \frac{4}{6}$$ |
| $$\frac{2}{6} \frac{3}{6}$$ | $$\frac{5}{12} \frac{5}{6} $$ | $$ \frac{5}{6} \frac{11}{12}$$ |
| $$\frac{5}{6} \frac{3}{6}$$ | $$\frac{4}{6} \frac{4}{3}$$ | $$\frac{13}{12} \frac{4}{3} $$ |

#### Einfache Additionen und Subtraktionen

Lösen Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie die entsprechenden Exis legen, und zwar so viele, wie jeweils durch den Zähler des Bruches angegeben wird. (Für $\frac{2}{3}$ legt man also z. B. zwei C und nicht ein H.) Zeichnen Sie Ihre Lösung dann mit zwei Farben in die Sechsecke ein.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| $$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{6}+\frac{3}{12}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{ }{ }$$ |

Legen Sie das Bruchstück für den Subtrahenden auf das für den Minuenden. Schraffieren Sie die Differenz.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| $$\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{5}{6}-\frac{2}{12}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{5}{12}-\frac{1}{6}=\frac{ }{ }$$ |

#### Ein Exi-Teil kann verschiedene Bruchteile repräsentieren

Wir haben bisher immer das große Sechseck A als Einheit (Ganzes) gewählt. Damit war z. B. das kleine Dreieck F gleich $\frac{1}{12}∙$ A. Es kann aber auch die Hälfte, ein Viertel, ein Sechstel usw. sein, je nachdem auf welches Ganze man es bezieht. Probieren Sie das aus, indem Sie das größere Exi jeweils mit dem kleineren auslegen. Zeichnen Sie anschließend Ihre Lösung in die Vorlage ein und geben Sie den jeweiligen Bruchteil an.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Welchen Bruchteil des abgebildeten Exis stellt F jeweils dar?
 |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| F = $\frac{ }{ }$ · D | F = $\frac{ }{ }$ · E | F = $\frac{ }{ }$ · C | F = $\frac{ }{ }$ · B | F = $\frac{ }{ }$ · H | F = $\frac{ }{ }$ · G |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Welchen Bruch­teil des abgebil­deten Exis stellt D jeweils dar?
 |  |

 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| D = $\frac{ }{ }$ · C | D = $\frac{ }{ }$ · B | D = $\frac{ }{ }$ · H | D = $\frac{ }{ }$ · G |

 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Welchen Bruch­teil des abgebil­deten Exis stellt E jeweils dar?
 |  |

 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| E = $\frac{ }{ }$ · C | E = $\frac{ }{ }$ · B | E = $\frac{ }{ }$ · H | E = $\frac{ }{ }$ · G |

 |

#### Bruch mal Bruch

In einem Produkt wie $\frac{2}{3}∙\frac{1}{2}$ bedeutet der erste Faktor einen Operator (zwei Drittel von …) der zweite Faktor wird durch ein Exi dargestellt. Zeichnen Sie das jeweilige Plättchen ein und nehmen Sie die Operation durch Einzeichnen von Trennlinien vor. Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| $$\frac{3}{2}∙\frac{1}{2}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{2}∙\frac{2}{3}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{2}∙\frac{5}{6}=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{4}∙\frac{1}{3}=\frac{ }{ }$$ |

Betrachten Sie diese Aufgabe auch unter dem Blickwinkel der Aufgabe 5!

#### Bruch durch ganze Zahl

Die zweite Zahl ist jetzt der Operator. Für die erste zeichnen Sie also die entsprechenden Exis ein. Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| $$\frac{6}{12}:3=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{2}{3}:2=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{1}{2}:6=\frac{ }{ }$$ | $$\frac{2}{3}:4=\frac{ }{ }$$ |

#### Bruch durch Bruch (Messen)

Die Division von Bruchzahlen lässt sich mit Hilfe des Messens verstehen. Die Bedeutung von $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ (der Divisor ist hier kleiner als der Dividend) lässt sich z. B. über folgende Frage erfassen: „Wie oft ist $\frac{1}{3}$ ist in $\frac{1}{2}$ enthal­ten?“ Ist der Divisor dagegen größer als der Dividend, wie bei $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$, dann steht der Quotient für folgende Frage: „Welcher Bruchteil von $\frac{1}{2}$ ist in $\frac{1}{3}$ enthal­ten?“

Beant­worten Sie die folgenden Aufgaben nicht formal, sondern durch Vergleich geeigneter Exis. Schraffieren Sie jeweils einzeln entsprechende Bruchteile des Sechsecks für den Dividend und den Divisor und ergänzen Sie wo nötig wesentliche Unterteilungslinien.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{ }{ }$$ |  |  |
| $$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{ }{ }$$ |  |  |
| $$\frac{1}{6}:\frac{2}{3}=\frac{ }{ }$$ |  |  |
| $$\frac{3}{2}:\frac{2}{3}=\frac{ }{ }$$ |  |  |
| $$\frac{2}{3}:\frac{3}{2}=\frac{ }{ }$$ |  |  |

#### Größenbeziehungen begründen

Begründen Sie die Größenbeziehung für die folgenden Relationen. Tun Sie das aber nicht formal, sondern unter Bezug auf die Anzahl und Größe der verwendeten Exis.

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{3}{12}<\frac{5}{12}$$ |  |
| $$\frac{5}{6}>\frac{5}{12}$$ |  |
| $$\frac{11}{12}>\frac{5}{6}$$ |  |