In: Fritz-Stratmann, Annemarie; Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz Verlag, Weinheim, 2009, S. 186-200

Jürgen Roth

Eine geometrische Lernumgebung

Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen

Häufig wird die Geometrie im Vergleich zur Algebra als weniger wichtiges Teilgebiet der Schulmathematik gesehen. Dies führt gelegentlich dazu, dass die Geometrieanteile im Unterricht nur einen sehr untergeordneten Stellenwert haben. Dabei wird übersehen, dass dies gerade auch im Hinblick auf die Entwicklung eines Grundverständnisses für algebraische Zusammenhänge problematisch ist. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Anschaulichkeit geometrischer Figuren und Beziehungen genutzt werden kann um Verständnisproblemen in der Algebra (hier am Beispiel der Bruchrechnung verdeutlicht) zu begegnen und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten solcher Probleme zu reduzieren.

Gerade leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler erleben es immer wieder als entlastend, wenn sie handelnd mit (geometrischen) Materialien umgehen und diese spielerisch erforschen können. Dabei stellen sich relativ schnell Erfolgserlebnisse ein, die häufig dazu führen, dass auch längerfristig konzentriert gearbeitet wird. Wenn die Lernumgebung genügend Substanz hat, können sich aus solchen Aktivitäten wesentliche Erkenntnisse und insbesondere Grundvorstellungen entwickeln auf die im Unterricht gewinnbringend zurückgegriffen werden kann.

1 Lernumgebungen

„Lernumgebungen“ sind „substanzielle Unterrichtseinheiten“ (Wittmann, 1992), die Wollring (2007b) charakterisiert als „eine Erweiterung dessen, was traditionell eine Aufgabe ausmacht oder ein flexibles Aufgabenformat. Sie besteht aus einem Netzwerk kleinerer Aufgaben, die durch Leitideen strukturiert und gebunden werden.“ Entscheidend ist dabei, dass die Lernumgebungen mathematisch fundiert und reichhaltig genug sind, dass wesentliche Entdeckungen gemacht und Erkenntnisse gewonnen oder vertieft werden können.

Gute Lernumgebungen regen Schülerinnen und Schüler dazu an, ihr eigenes Handeln zu reflektieren. Dies kann durch das Einfordern von Erklärungen und Beschreibungen des eigenen Tuns (in der Partnerarbeit und im Plenum) und durch geeignete Methoden der Ergebnissicherung unterstützt werden. Daneben müssen Lernumgebungen eine Binnendifferenzierung ermöglichen, logistisch leicht im Unterricht eingesetzt werden können und dürfen nicht isoliert stehen, sondern müssen bewusst mit anderen Lernumgebungen vernetzt sein.

Die Grundidee der hier propagierten Lernumgebung ist es, die Anschaulichkeit geometrischer Figuren zu nutzen, um inhaltliche Verständnisgrundlagen für algebraische Aspekte zu entwickeln. Dabei werden die verschiedenen Perspektiven von Algebra und Geometrie auf ein Phänomen bewusst zur wechselseitigen Interpretation genutzt.

2 Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und zum Bruchrechnen mit Hilfe geometrischer Figuren

Die Bruchrechnung wird von vielen Schülerinnen und Schülern, aber auch von Lehrkräften als „schwierig“ eingestuft. Eine ganze Reihe von Untersuchungen zeigen, dass ein wesentlicher Grund dafür die fehlende oder zu knappe Entwicklung von *inhaltlichen* Vorstellungen zu Bruchzahlen und dem Rechen mit Bruchzahlen ist (vgl. etwa Wartha/vom Hofe, 2005). Anhand von geometrischen Figuren lassen sich solche Vorstellungen handelnd aufbauen, in bildlichen Darstellungen festhalten und reflektieren.

2.1 Das Arbeitsmaterial

Im Folgenden wird exemplarisch mit einem regelmäßigen Sechseck als dem *Ganzen* gearbeitet, zu dem verschiedene Teilfiguren existieren, mit dem das Sechseck ausgelegt werden kann (vgl. Abb. 1). Besuden (2000) hat diese Figuren in Anlehnung an den griechischen Namen H*ex*agon für das Sechseck und wegen des Namens eines entsprechenden im Handel erhältlichen Figurensatzes aus Kunststoff (vgl. Schmidt 2008) als „Exis“ bezeichnet.

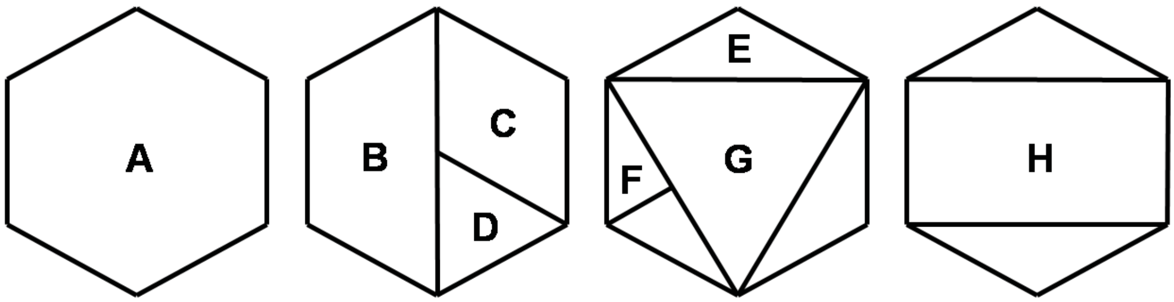

Abb. 1: Das regelmäßigen Sechseck A und die (Teil-)Figuren B bis H sind die Exis.

Für die konkrete Umsetzung im Unterricht empfehle ich, die Vorlage (vgl. Abb. 2) auf der dem Buch beiliegenden CD ROM auf schweres farbiges Papier auszudrucken und die Schülerinnen und Schüler jeweils einen Bogen ausschneiden zu lassen. Dabei sollten Banknachbarn jeweils einen Bogen in anderer Farbe erhalten und nach dem Ausschneiden die Sechsecke tauschen. Auf diese Weise ergibt sich ein deutlicher Kontrast zwischen dem Ganzen (also dem Sechseck) und den darauf gelegten kleineren Exis.

Für die weitere Handhabung der Exis empfiehlt es sich jeweils zwei unterschiedlich farbige Exi-Sets in einen Druckverschluss-Beutel zu stecken. Auf diese Weise kann das Arbeitsmaterial leicht ausgeteilt und auch wieder eingesammelt werden.

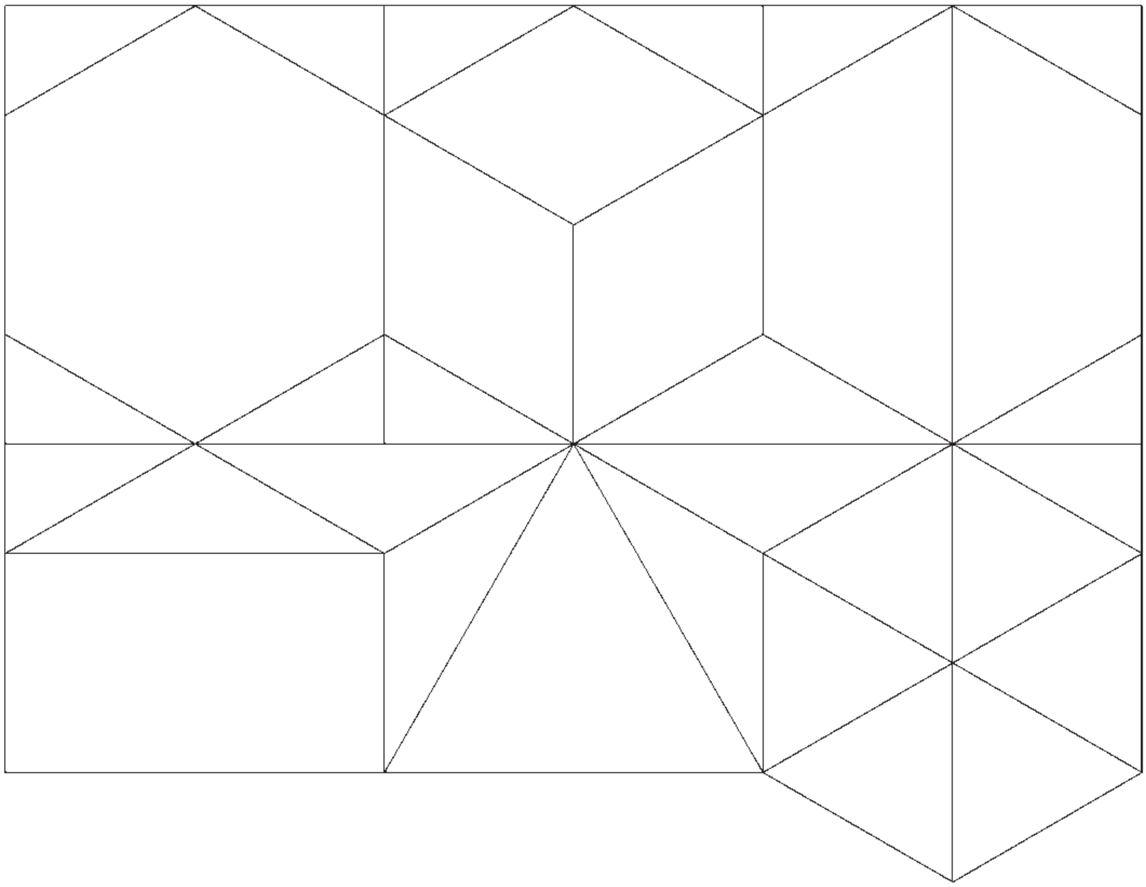

Abb. 2: Bastelvorlage für die Exis.

2.2 Kennenlernen des Materials und Bruch als Teil eines Ganzen

Die folgenden Aufgaben dienen einerseits zum Kennenlernen des Materials und helfen andererseits dabei die wesentliche Grundvorstellung „Bruch als Teil eines Ganzen“ auszubilden. Diese lässt sich gut dadurch anbahnen, dass man versucht, ein Ganzes, hier also das regelmäßige Sechseck A mit verschiedenen gleichen Teilen auszulegen. Durch das Abzählen der zum vollständigen Auslegen benötigten Stücke lässt sich auf den Bruchteil des einzelnen Stücks bezüglich des Ganzen, hier also des Sechsecks schließen (vgl. Abb. 4).

Entscheidend ist, dass die Ergebnisse der Arbeit mit dem Material in einer Skizze festgehalten werden. Nur so kann man sich anschließend darüber austauschen und später auch ohne Material auf die damit gewonnenen Erkenntnisse (notfalls durch Anfertigen von Skizzen) zurückgreifen. Hier wie im Folgenden sollten zu jeder Aufgabe Sechseckvorlagen (vgl. Abb. 3) zum Eintragen der Arbeitsergebnisse auf einem Arbeitsblatt angeboten werden.

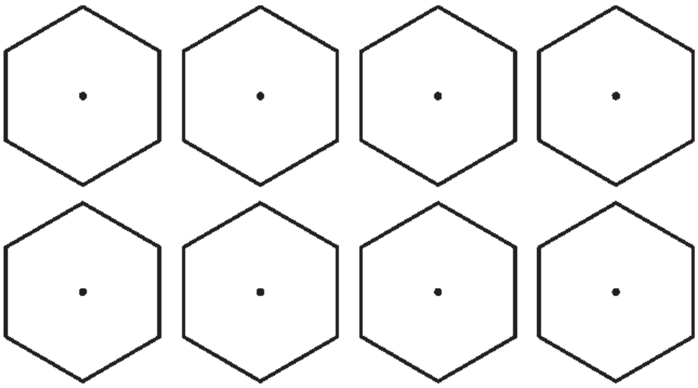

Abb. 3: Sechseckvorlagen zu den einzelnen Aufgaben der Lernumgebung.

a) Zählt nach, wie oft jeder Exi-Typ im Sortiment (gleicher Farbe) vorhanden ist und tragt die Anzahlen in die Tabelle ein.
b) Legt das Sechseck A mit gleichen Exis aus und zeichnet entsprechende Trennlinien in die abgebildeten Sechsecke ein. Findet ihr für manche Exi-Typen verschiedene (nicht deckungsgleiche) Möglichkeiten zum Auslegen der Sechsecke?
c) Welchen Bruchteil des Sechsecks A stellen die Exi-Typen jeweils dar? Tragt die Ergebnisse eurer Überlegungen in die Tabelle ein.

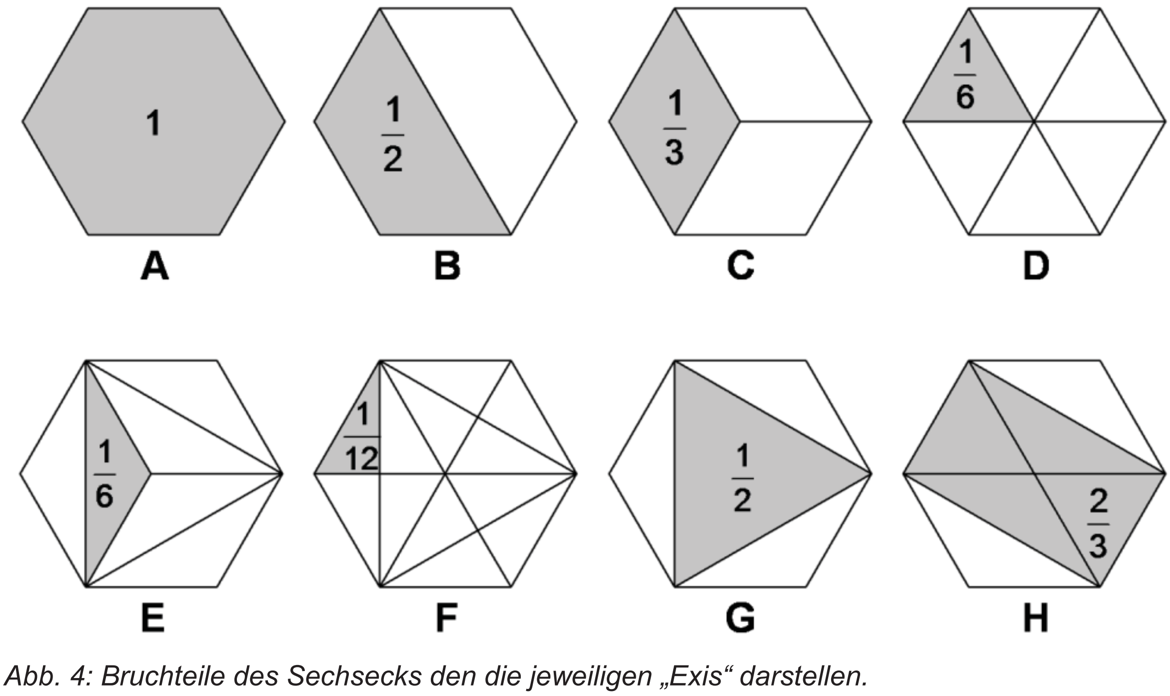

Abb. 4: Bruchteile des Sechsecks den die jeweiligen „Exis“ darstellen.

Exi-Typ	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Anzahl der gleichen Teile	1	2	3	6	6	12	1	1
Bruchteil des Sechsecks A	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Tab. 1: Ausgefüllte Tabelle zu den Aufgaben im Kasten.

Betrachtet man die Abbildung 4 und die in Tabelle 1 festgehaltenen korrespondierenden Ergebnisse, so fällt auf, dass man Lösungen für die ersten sechs Exi-Typen A bis F alleine durch vollständiges Auslegen des Sechsecks A, mit dem jeweiligen Exi-Typ erreichen kann. Jedes dieser Exis bildet also eine Brucheinheit, mit der man rechnen kann, die also insbesondere im Sinne einer Quasikardinalzahl addiert und subtrahiert werden können. Gemeint sind dabei Rechnungen der Art „1 Drittel + 1 Drittel = 2 Drittel".

Mit den Exi-Typen G (großes gleichseitiges Dreieck) und H (Rechteck) kann das Sechseck nicht vollständig ausgelegt werden. Dadurch wird auch die Bestimmung des zugehörigen Bruchteils schwieriger. Hier können aber Ergebnisse verwendet werden, die bei den anderen Exi-Typen gewonnen wurden.

Passt man G in das Sechseck A ein, so stellt man fest, dass die drei überstehenden Teildreiecke des Sechsecks gerade mit stumpfwinkligen Dreiecken des Typs E bedeckt werden können. Da man für das Auslegen des ganzen Sechsecks sechs Dreiecke des Typs E benötigt, bedeckt das gleichseitige Dreieck G also die Hälfte des Sechsecks A, der zugehörige Bruchteil ist also ein Halb von A.

Es gibt sehr unterschiedliche Wege, um den Bruchteil zu bestimmen, der dem Rechteck entspricht. Analog zum Vorgehen beim Dreieck G kann man zunächst auf den Bruchteil vier Sechstel von A kommen. Man kann aber auch versuchen, das Rechteck mit anderen Exis auszulegen, deren Bruchteile bzgl. des Sechsecks A bereits bekannt sind. Eine solche Möglichkeit ist in Abbildung 4 dargestellt. Hier wird das Rechteck mit vier Exis ausgelegt, die jeweils den Bruchteil ein Sechstel von A ausmachen. Damit ergibt sich wieder der Bruchteil vier Sechstel von A. Man kann aber auch erkennen, dass man aus jeweils zwei deckungsgleichen dieser vier Exis jeweils eine Raute C auslegen kann, deren Bruchteil ein Drittel von A ist. Damit ergibt sich der Bruchteil zwei Dritteln von A für das Rechteck. Schließlich lässt sich das Rechteck auch noch mit 8 kleinen rechtwinkligen Dreiecken F auslegen, deren Bruchteil jeweils ein Zwölftel von A beträgt. Dies ergibt acht Zwölftel von A für den Bruchteil des Rechtecks.

An dieser Stelle wird deutlich, dass es mehrere Zugänge für die Lösung einzelner Teilaufgaben gibt und damit individuelle Zugänge der Schülerinnen und Schüler möglich sind. Diese ermöglichen einerseits eine Binnendifferenzierung und regen andererseits eine Diskussion über die Ergebnisse an, die schon zum nächsten Thema überleitet, nämlich dem Erweitern und Kürzen von Brüchen.

2.3 Erweitern, Kürzen und Vergleichen

Was bedeutet es eigentlich, Brüche zu erweitern bzw. zu kürzen? Ein weit verbreitetes Fehlerformat in diesem Zusammenhang besteht darin, dass z. B. statt der Erweiterung eines Bruchs mit zwei, also statt des Verdoppelns von Zähler *und* Nenner des Bruchs, der Bruch einfach mit zwei multipliziert wird. Diese Art von Fehler deutet darauf hin, dass das Grundverständnis *Erweitern* bedeutet *Verfeinern der Einteilung* und *Kürzen* bedeutet *Vergröbern der Einteilung* noch nicht ausgebildet und entwickelt ist.

> Erweitern und Kürzen von Brüchen
>
> *Erweitern* eines Bruchs bedeutet *Verfeinern der Unterteilung* des Ganzen *und* des betrachteten Bruchteils des Ganzen.
>
> *Kürzen* eines Bruchs bedeutet *Vergröbern der Unterteilung* des Ganzen *und* des betrachteten Bruchteils des Ganzen.

Erfahrungen, die die Entwicklung dieser Grundvorstellungen unterstützen, können mit der vorliegenden Lernumgebung gut erarbeitet werden. Abbildung 5 verdeutlicht die dabei zugrunde liegende Idee und die Vorgehensweise. Das Ganze, also das Sechseck A, wird mit Exis eines Typs, hier der Raute C, ausgelegt. Dabei wird ein Bruchteil, hier ein Drittel, in einer anderen Farbe gelegt, wodurch der Bruchteil und auch dessen Bezug zum Ganzen visualisiert sind. Das Ganze wurde in drei Teile geteilt und ein Teil (ein Drittel) wurde in einer anderen Farbe gelegt.

Man kann das Ganze aber auch mit kleineren Exis der gleichen Sorte auslegen und dabei auf die Farbe achten. Man hat dabei die Unterteilung des interessierenden, andersfarbigen Bruchteils von A (hier ein Drittel) *und* die Unterteilung des Ganzen (des Sechsecks A) verfeinert. Das Ganze wird jetzt also etwa in sechs Teile geteilt, wobei der andersfarbige Anteil nun aus zwei dieser sechs Teil besteht. Hier wurden also sowohl die Anzahl der Teile des Ganzen als auch die Anzahl der Teile des andersfarbigen Anteils verdoppelt. Die andersfarbigen Exis stellen aber immer denselben Bruchteil von A dar, weil der Flächenanteil von A immer derselbe ist. Damit wird deutlich, dass ein Drittel und zwei Sechstel denselben Bruchteil des Ganzen darstellen.

Entscheidend ist, dass die Vorgehensweise auch mit Farbstiften in die Sechseckvorlagen des Arbeitsblatts skizziert wird. Dabei wird das Verfeinern der Einteilung des Ganzen durch Einzeichnen von zusätzlichen Unterteilungsstrichen durchgeführt. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass eine

Verfeinerung der Unterteilung des Ganzen automatisch auch eine entsprechend feinere Unterteilung des betrachteten Bruchteils des Ganzen nach sich zieht.

Verfeinerung des Bruchteils *alleine* ist dagegen in der Regel nicht hilfreich. Man erkennt daran nämlich häufig nicht, in wie viele Teile das Ganze nun eingeteilt ist. Aus diesem Grund kann auch der zugehörige Bruch nicht direkt abgelesen werden. Dahinter steckt eine Grundvorstellung zur Bruchdarstellung, die Besuden (2000, S. 137) wie folgt beschreibt: „Über dem Bruchstrich steht die *Anzahl* der Teile, unter dem Bruchstrich ihre *Größe* (in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wurde).“

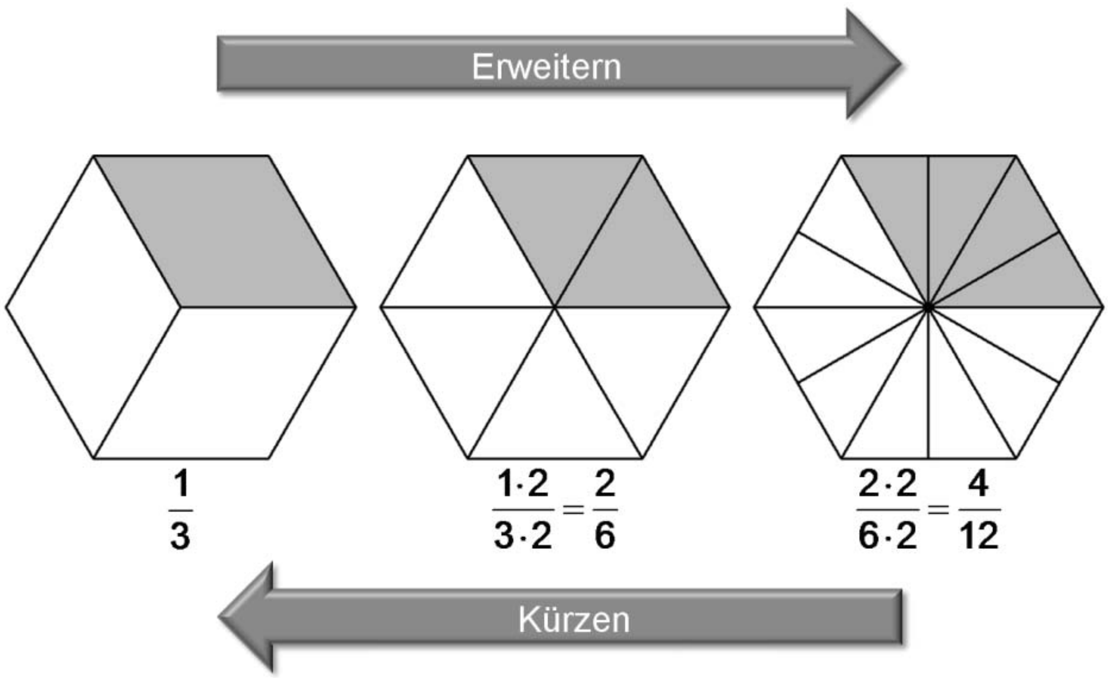

Abb. 5: Bruchteile Erweitern bzw. Kürzen bedeutet die Unterteilung des Bruchteils und des Ganzen entsprechend zu Verfeinern bzw. zu Vergröbern.

a) Legt das Sechseck A mit den rautenförmigen Exis des Typs C aus, wobei eine der Rauten eine andere Farbe als die anderen Rauten haben soll. Welchen Bruchteil von A stellt die andersfarbige Raute dar? Zeichnet das Ergebnis in eine Sechseckvorlage und verwendet dabei entsprechende Farbstifte.

b) Legt nun auf die Rauten C dreieckige Exis des Typs D. Achtet dabei darauf, dass die Dreiecke jeweils dieselbe Farbe haben, wie die darunterliegende Raute. Welchen Bruchteil von A stellen die andersfarbigen Dreiecke D zusammen dar? Zeichnet das Ergebnis in eine Sechseckvorlage und verwendet dabei entsprechende Farbstifte.

c) Könnt ihr das Sechseck mit noch kleineren gleichen Exis auslegen und dabei die Farben beachten? Welchen Bruchteil von A stellen die andersfarbigen Exis zusammen dar? Zeichnet das Ergebnis in eine Sechseckvorlage und verwendet dabei entsprechende Farbstifte.

d) Hat sich in den Aufgaben der Anteil der andersfarbigen Teilflächen an der gesamten Fläche des Sechsecks verändert? Was bedeutet das für die Brüche, die ihr in den Teilaufgaben a) bis c) erarbeitet habt?

e) Verfeinert auch bei den folgenden Brüchen jeweils die Unterteilung des Ganzen und des andersfarbig gelegten Bruchteils. Man nennt dieses Vorgehen *Erweitern von Brüchen*. Findet Ihr für die Brüche auch mehr als eine Möglichkeit sie zu erweitern? 2/3; 1/2, 5/6, 1/6, 1/3, 1

Analog kann man sich das Kürzen von Brüchen als Vergröbern der Unterteilung des Ganzen und des betrachteten Bruchteils des Ganzen erarbeiten. Auch die zugehörigen Aufgaben zum Kürzen von Brüchen können analog zu den oben angegebenen gestellt werden. Als Brüche für entsprechende Aufgaben mit Exis eignen sich etwa 3/6, 2/6, 4/6, 6/6, 4/12, 6/12, 2/12, 10/12.

Vergleichen von Brüchen

Brüche lassen sich gut über die Anzahl (Zähler) und Größe (Nenner) der beteiligten (Exi-) Teile *vergleichen*.

Brüche lassen sich hinsichtlich ihrer Größe gut inhaltlich gut über die Anzahl und Größe der verwendeten Exis *vergleichen*. Dies gelingt z. B. bei den Brüchen 3/12 im Vergleich zu 5/12 und bei 5/6 im Vergleich zu 5/12. In manchen Fällen, wie etwa bei 11/12 im Vergleich zu 5/6 kann es vorher hilfreich sein, die Unterteilung eines oder beider Brüche vorher geeignet zu verfeinern (Erweitern).

2.4 Addieren und Subtrahieren

Das Addieren und Subtrahieren von Brüchen ist zunächst unproblematisch, da hier die aus dem Bereich der natürlichen Zahlen vertraute inhaltliche Grundvorstellung des Zusammenfügens und Wegnehmens weiterhin trägt. Wie Abbildung 6 zeigt, kann der Wert der Summe (bzw. der Differenz) allerdings in der Regel erst durch geeignetes Verfeinern der Einteilung (Erweitern) abgelesen werden. Notwendig ist eine Einteilung, die ein vollständiges Auslegen beider Summanden mit demselben Exi-Typ zulässt.

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Addieren zweier Brüche bedeutet *Zusammenlegen der beiden Bruchteile.*

Subtrahieren eines Bruches von einem andern Bruch bedeutet *Wegnehmen des einen Bruchteils.*

In beiden Fällen muss in der Regel die Einteilung des Ergebnisses verfeinert werden, damit dessen Wert abgelesen werden kann.

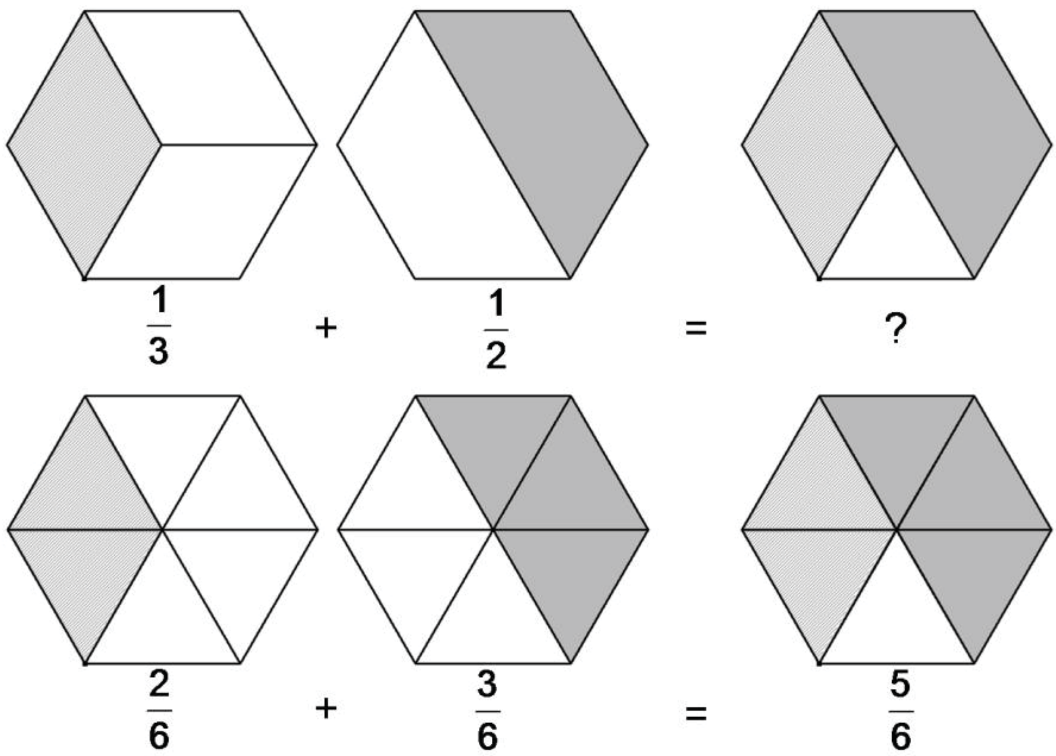

Abb. 6: Addieren von Brüchen bedeutet, diese zusammenzulegen. Der Wert der Summe kann in der Regel erst durch geeignetes Verfeinern der Einteilung bestimmt werden.

Löst die folgenden Aufgaben, indem ihr die entsprechenden Exis in ein Sechseck legt, und zwar so viele, wie jeweils durch den Zähler des Bruchs angegeben wird (Für 2/3 legt man also z. B. zwei Rauten C und nicht ein Rechteck H.). Zeichnet eure Lösungen jeweils mit zwei Farben in ein Sechseck der Arbeitsblattvorlage ein und schreibt den Bruchteil der Summe dazu.

Hinweis: Zum Ablesen des Ergebnisses kann es nützlich sein, zusätzliche Unterteilungsstriche einzuzeichnen.

a) 2/3 + 3/6 =
b) 1/3 + 1/6 =
c) 1/6 + 3/12 =
d) 1/2 + 1/3 =

Legt bei den folgenden Aufgaben den Bruchteil für den Subtrahenden auf den für den Minuenden. Zeichnet eure Lösungen jeweils mit zwei Farben in ein Sechseck der Arbeitsblattvorlage ein und schreibt den Bruchteil der Differenz dazu.

Hinweis: Zum Ablesen des Ergebnisses kann es nützlich sein, zusätzliche Unterteilungsstriche einzuzeichnen.

e) 4/6 – 3/6 =
f) 2/3 – 1/6 =
g) 5/6 – 2/12 =
h) 5/12 – 1/6 =

2.5 Ein Exi-Typ kann verschiedene Bruchteile repräsentieren

Ein weiterer wichtiger Aspekt für das Verständnis von Bruchzahlen ist die Einsicht, dass eine Realisierung (hier z. B. ein Exi) jeweils einen Anteil von einem Ganzen angibt, ein Bruchteil also eine relative Größe ist, die vom Ganzen abhängt. Um diese Erkenntnis zu verinnerlichen wird hier das Ganze variiert.

Bisher wurde immer das Sechseck A als das Ganze gewählt. Damit entspricht etwa das kleine rechtwinklige Dreieck F dem Bruchteil 1/12 von A. Es kann aber auch die Hälfte, ein Viertel, ein Sechstel usw. sein, je nachdem, auf welches Ganze man es bezieht. Dies lässt sich erforschen, wenn man ein größeres Exi jeweils mit gleichen kleineren Exis auslegt. Das Ergebnis sollte durch Einzeichnen von Unterteilungsstrichen in die Vorlage festgehalten und als Bruchteil angegeben werden.

a)	Welchen Bruchteil der Exis in der oberen Reihe der Abbildung 7 stellt F jeweils dar?
b)	Welchen Bruchteil der Exis in der mittleren Reihe der Abbildung 7 stellt D jeweils dar?
c)	Welchen Bruchteil der Exis in der unteren Reihe der Abbildung 7 stellt E jeweils dar?

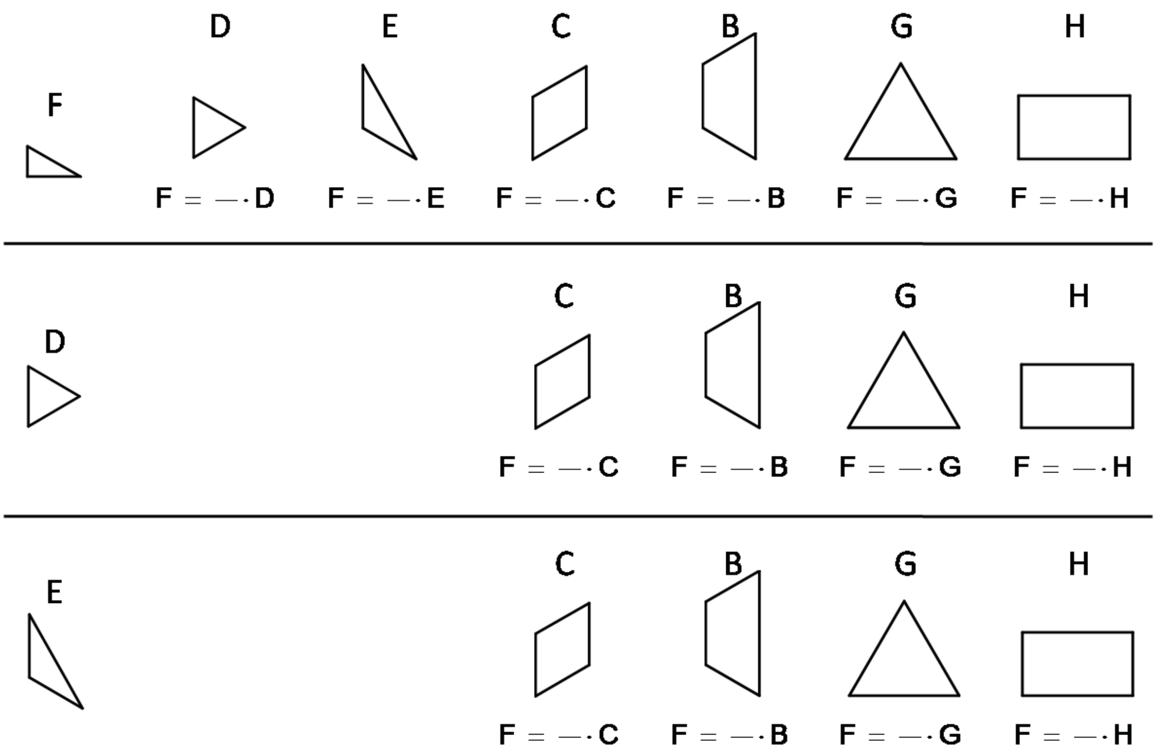

Abb. 7: Bestimmen des Bruchteils einzelner Exis bzgl. anderer Exi-Teile als Ganzem.

2.6 Multiplizieren von zwei Brüchen

Für das Multiplizieren zweier Brüche ist die Grundvorstellung des *relativen Anteils* (manchmal auch als von-Ansatz bezeichnet) notwendig. Diese Sichtweise ist den Schülerinnen und Schülern für spezielle Brüche aus dem Alltag vertraut, etwa „Dafür musst du die Hälfte von deinem Taschengeld bezahlen." oder „Ich hätte gern drei Viertel von diesem Kuchen.".

> Multiplizieren zweier Brüche
>
> Das *Multiplizieren* zweier Brüche beruht auf der Grundvorstellung des relativen Anteils (von-Ansatz). So wird etwa 2/3 · 1/2 als 2/3 *von* 1/2 gedeutet.

Auf diese Alltagserfahrung kann auch im Zusammenhang mit Exis zurückgegriffen werden. Allerdings können bei einem Produkt aus zwei Brüchen, etwa 1/3 · 1/2 nicht mehr beide Brüche mit Exis gelegt werden. Es wird vielmehr nur der zweite Bruch gelegt, während der erste Bruch als Operator wirkt. Es wird also ein Drittel des Trapezes B (das ja die Hälfte des Sechsecks A ist) gesucht. Dazu kann man das Trapez B mit drei Exis des gleichen Typs auslegen, dies geht hier nur mit dem gleichseitigen Dreieck D. Eines der gleichseitigen Dreiecke entspricht dann einem Drittel von B. Da das Dreieck D ein Sechstel des Sechsecks A ist, folgt 1/3 · 1/2 = 1/6. In der Zeichnung kann dieses Ergebnis noch einfacher erhalten werden: Man zeichnet in die Sechseckvorlage das Exi B ein, das die Hälfte des Sechsecks ist, ergänzt geeignete Unterteilungsstriche, so dass B in drei gleiche Teile geteilt wird und schraffiert eines davon.

> In einem Produkt wie 2/3 · 1/2 wird der erste Faktor als Operator gedeutet (zwei Drittel von …) und der zweite Faktor als Exi dargestellt. Zeichnet das entsprechende Exi in das Vorlagensechseck ein und führt die Operation durch Ergänzen von Trennlinien aus. Schraffiert das Ergebnis und gebt dessen Wert an.
>
> a) 1/4 · 1/3 =
> b) 1/2 · 2/3 =
> c) 3/2 · 1/2 =
> d) 1/2 · 5/6 =

2.7 Dividieren eines Bruchs durch eine ganze Zahl

Das Dividieren eines Bruchs durch eine ganze Zahl beruht auf der Grundvorstellung des *Verteilens*. So kann etwa 1/2 : 2 als Verteilen des Bruchteils 1/2 des Ganzen an zwei Personen gedeutet werden, die dann jeder ein Viertel des Ganzen erhalten. Auch hierzu liegen diverse Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler vor (man deute das Ganze etwa als eine Pizza), die im Unterricht aktiviert werden sollten. Genau wie beim Multiplizieren zweier Brüche kann auch beim Dividieren eines Bruchs durch eine ganze Zahl nur der Bruch als Exi gelegt werden, während die ganze Zahl als Operator gedeutet wird.

Dividieren eines Bruchs durch eine ganze Zahl

Das *Dividieren eines Bruchs durch eine ganze Zahl* beruht auf der Grundvorstellung des *Verteilens*.

Die zweite Zahl ist jetzt der Operator. Zeichnet für die erste Zahl das entsprechende Exi in das Vorlagensechseck ein. Schraffiert das Ergebnis und gebt dessen Wert an.

a) 6/12 : 3 =
b) 2/3 : 2 =
c) 1/2 : 6 =
d) 2/3 : 4 =

2.7 Bruch durch Bruch

Viele Erwachsene können auf die Frage, was sie sich inhaltlich unter der Aufgabe „6:2“ vorstellen, eine passende Antwort geben. Oft hört man etwas Ähnliches wie: „Wie viele Murmeln erhält jeder, wenn man sechs Murmeln an zwei Personen verteilt?“ Die wenigsten werden eine Antwort geben, die mit der folgenden vergleichbar ist, obwohl auch das sehr sinnvoll wäre: „Wie oft muss man einen ganz ausgeklappten Zollstock (von zwei Metern Länge) anlegen, um einen sechs Meter langen Gang auszumessen?“

Das *Verteilen* ist für die meisten Menschen im Hinblick auf die Division so naheliegend, dass sie die Alternative, nämlich das *Messen*, gar nicht verinnerlichen. Dies ist aber gerade für die Bruchrechnung äußerst problematisch, weil das Verteilen nur bei natürlichen Divisoren sinnvoll erklärt ist. Für Bruchzahlen führt dagegen nur das Messen zu einer brauchbaren Vorstellung zur Division. Hier ist auch der Grund für die Tatsache zu suchen, dass man von den selben Erwachsenen, die eben noch antworten konnten, auf die Frage, was sie sich inhaltlich unter der Aufgabe „½:¼“ vorstellen, in der Regel ausschließlich irritierte Mienen erntet, aber keine Antworten erhält.

Welche Vorstellung ist hier aber adäquat? Nun, wenn ich eine Strecke von einem halben Meter Länge mit einem Maßstab ausmessen möchte, der ein Viertel Meter lang ist, dann stelle ich die Frage, wie oft der Maßstab in den halben Meter passt, nämlich zwei Mal.

Was passiert aber, wenn das Maß größer ist als die zu messende Länge, wenn also z. B. eine Strecke von einem Viertel Meter Länge mit einem Maßstab ausmessen möchte, der einen halben Meter lang ist? In diesem Fall stellt sich die Frage, welcher Bruchteil des Maßstabs in den viertel Meter passt, hier ist das der Bruchteil ein Halb.

> Bruch durch Bruch
>
> Ist das *Maß kleiner als die zu messende Größe*, wie bei ¾ : ¼, dann stellt sich die Frage: „*Wie oft ist ¼ in ¾ enthalten*?“ Antwort: „¼ ist drei Mal in ¾ enthalten.“
>
> Ist das *Maß größer als die zu messende Größe*, wie bei ¼ : ¾, dann stellt sich die Frage: „*Welcher Bruchteil von ¾ passt in ¼*?“ Antwort: „⅓ von ¾ passt in ¼.“

Bevor innerhalb der Lernumgebung mit den Exis Aufgaben zu Bruch durch Bruch bearbeitet werden, empfiehlt es sich im Klassenverband anhand der Längenmessung mit einem Maßstab fester Länge die oben angesprochenen Fragen zu erforschen und zu diskutieren. Insbesondere ist der Aspekt des Auslegens der zu messenden Größe mit dem Maß(stab) explizit durchzuführen und zu diskutieren. Für die Exis bedeutet das, dass das Maß (der Divisor) auf die zu messende Größe (den Dividenden) gelegt werden muss, um zu entscheiden wie oft es in der zu messenden Größe enthalten ist bzw. welcher Bruchteil davon hineinpasst. Anschließend können die Schülerinnen und Schüler Aufgaben wie die folgenden je nach Leitungsfähigkeit in Partner- oder Gruppenarbeit selbstständig bewältigen.

Bei auftretenden Schwierigkeiten kann noch einmal die Analogie zur Längenmessung aktiviert und betont werden, dass man das Maß auf die zu messende Größe legen muss, um die Fragen entscheiden zu können. Hier ist insbesondere auch die zugehörige Skizze wesentlich. Die Frage welcher Bruchteil des Dividenden in den Divisor passt, ist beispielsweise am leichtesten dadurch zu klären, dass man entsprechende Unterteilungslinien in der Skizze ergänzt (vgl. Abb. 8a und Abb. 8b), die Unterteilung also verfeinert.

> a) Bei der Division ½ : ⅓ ist das Maß ⅓ kleiner als ½, also das was gemessen werden soll. Hier stellt sich also folgende Frage: „Wie oft ist ⅓ in ½ enthalten?“ Beantwortet diese Frage, indem ihr ein passendes Exi mit einem geeigneten anderen Exi messt. Schraffiert jeweils einzeln entsprechende Bruchteile von A auf den Sechseckvorlagen für die zu messende Größe sowie das Maß und ergänzt wo nötig wesentliche Unterteilungslinien.
>
> b) Nun werden das Maß und die zu messende Größe vertauscht. Bei der Division ⅓ : ½ ist das Maß ½ größer als ⅓, also das was gemessen werden soll. Hier stellt sich also folgende Frage: „Welcher Bruchteil von ½ ist in ⅓ enthalten?“ Beantwortet diese Frage, indem ihr ein passendes Exi mit einem geeigneten anderen Exi messt. Schraffiert jeweils einzeln entsprechende Bruchteile von A auf den Sechseckvorlagen für die zu messende Größe sowie das Maß und ergänzt wo nötig wesentliche Unterteilungslinien.
>
> c) Beantwortet die entsprechenden Fragen für 1/6 : 2/3 und 2/3 : 1/6.

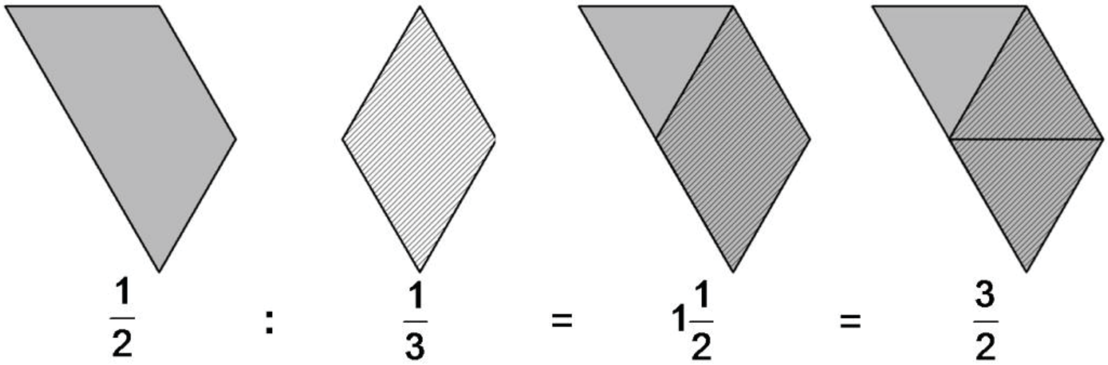

Abb. 8a: Ergebnis der Bearbeitung der Aufgabe a).

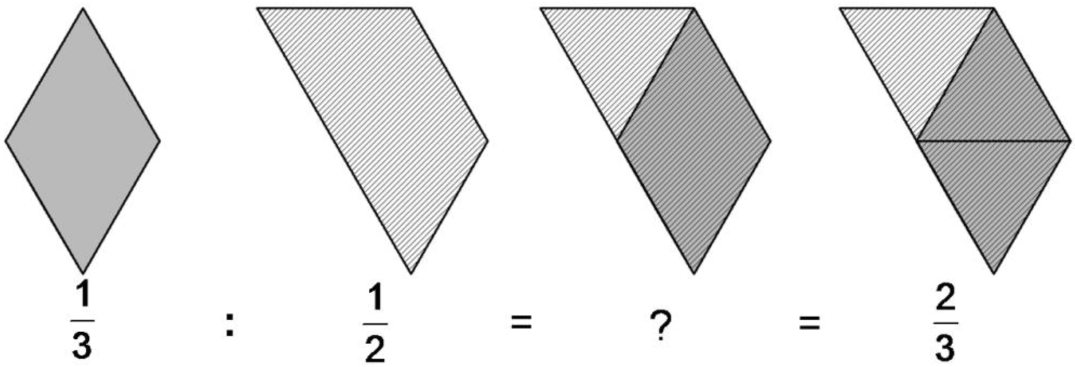

Abb. 8b: Ergebnis der Bearbeitung der Aufgabe b).

3 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Darstellung war es zu verdeutlichen, wie die beschriebene geometrische Lernumgebung die Entwicklung und Vertiefung von inhaltlichen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und zur Bruchrechnung unterstützen kann. Entscheidend für den Erfolg dieser Lernumgebung im Unterricht ist, dass die Möglichkeiten und Grenzen klar erkannt und herausgearbeitet werden.

Wenn etwa der Bruchteil 1/5 veranschaulicht werden soll, so ist das hier vorgestellte Material aufgrund seiner Geometrie denkbar ungeeignet dafür. Hier wäre ein Material auf der Basis eines regelmäßigen Fünfecks deutlich besser geeignet und sollte bei Bedarf evtl. auch herangezogen werden. Es muss (auch den Schülerinnen und Schülern) klar sein oder werden, dass man mit diesem Material nicht alle Bruchrechenaufgaben lösen kann. Die Qualität dieser Lernumgebung kommt dann zum Tragen, wenn sie genutzt wird um inhaltliche Vorstellungen zum Bruchrechnen anzubahnen, auf die bei Bedarf immer wieder zurückgegriffen werden kann.

Die Lernumgebung sollte nicht am Stück zu allen Teilthemen abgearbeitet werden, sondern nach und nach an verschiedenen Stellen des Bruchrechenunterrichts zum Einsatz kommen. Nur so besteht die Chance, dass die Schülerinnen und Schüler damit vertraut werden und es als Werkzeug für eigene inhaltliche Überlegungen in Besitz nehmen. In diesem Zusammenhang kommt auch der bildlichen Darstellung des Umgangs mit den Exis eine wichtige Rolle zu. Die Exi-Teile selbst sind nicht immer verfügbar, aber die zugehörigen Ideen können jederzeit in Form von Skizzen aktiviert werden.

Es werden keine fertigen Arbeitsblätter angeboten, weil aus den hier vorgestellten Ideen erst dann eine adäquate Lernumgebung für Schülerinnen und Schüler entsteht, wenn jede Lehrerin und jeder Lehrer die Aufgabenstellungen und das Anforderungsniveau im Hinblick auf die eigene Klassensituation anpasst und optimiert. Die Lehrkraft ist ein wesentlicher und unverzichtbarer Bestandteil jeder guten Lernumgebung …

Literatur

Besuden, H. (2000): Bruchrechnen mit EXI. In: Mathematik in der Schule, H. 3, S. 136–142

Schmidt, T. (2008): EXI. Horst/Holstein: Lehrmittelverlag Torsten Schmidt. www.schmidt-lehrmittel.de/shop/index.html?ad=025058_EXI.html (Abruf 16.12.2008)

Wartha, S./vom Hofe, R. (2005): Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. In: Mathematik lehren 128, S. 10-16

Wittmann, E. Chr. (1992): Mathematikdidaktik als „design science". In: Journal für Mathematik-Didaktik 13, H. 1, S. 55–70

Wollring, B. (2007a): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/HomePersonal/lilitakis/home/workshops/LernumgebungenWofSinusHessen07071.pdf (Abruf 16.12.2008)

Wollring, B. (2007b): Würfelnetze finden und ordnen – Design von Lernumgebungen zur geometrie für die Grundschule. www.sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienIPN/Wollring_Wuerfelnetze_finden_und_ordnen_43_f_Erkner_07-06-22.pdf (Abruf 16.12.2008)