Station „Gleichdicks“

Hilfestellungen

Mathematik-Labor
Uni Koblenz-Landau

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Dies ist das Hilfestellungsheft zur Station *Gleichdicks*. Ihr könnt es nutzen, wenn ihr bei einer Aufgabe Schwierigkeiten habt.

Falls es mehrere Tipps zu einer Aufgabe gibt, dann könnt ihr dies am Pfeil  erkennen. Benutzt bitte immer nur so viele Hilfestellungen, wie ihr benötigt, um selbst weiterzukommen.

Viel Erfolg!
Das Mathematik-Labor-Team

Seite 3 (Aufgabe 1, Experiment 1)

Schreibt hier einfach eure Überlegungen auf. Es ist nicht schlimm, wenn ihr (noch) keine Vermutung habt.

Seite 5 (Aufgabe 1, Experiment 2)

Stellt nochmals ganz klar heraus, was in den Experimenten 1 und 2 untersucht wurde.

Bei welchen Figuren sind euch Besonderheiten aufgefallen? Gibt es hier einen Zusammenhang?

Bei welchen Rädern R1 – R6 waren die drei Messungen in Experiment 2 gleich? Bei welchen Rädern waren die Bewegungen mit der breiteren Holzplatte HP1 in Experiment 1 nicht „holprig“?

Seite 7, Teil 1 (Aufgabe 1, Simulation 1)

Ist eine Stützgerade durch einen (Eck-)Punkt eindeutig bestimmt?

Dadurch, dass die Stützgerade durch einen Eckpunkt nicht eindeutig definiert ist, könnt ihr unendlich viele Geraden an einer Ecke anlegen. Gilt dies auch für ihre Parallele? Kann man deshalb auch unendlich viele Stützgeradenpaare bilden?

Seite 7, Teil 2 (Aufgabe 1, Simulation 1)

Denkt an Experiment 1 oder schlagt nochmals dort nach.

Bei welchen Doppelrollen des Experiments 1 wackelte die breitere Holzplatte (HP1), wenn ihr sie auf den Doppelrollen hin und her bewegt habt?

Vielleicht fallen euch nun auch noch weitere einfache Figuren aus eurem Mathematik-unterricht ein, die keine Gleichdicks sind? Wenn ja, schreibt sie in euer Aufgabenheft.

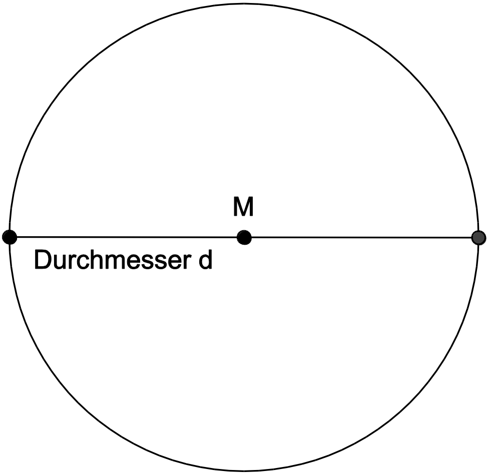
Seite 8 (Aufgabe 1, Simulation 1)

Bei Experiment 2 habt ihr mithilfe der Schiebelehre bei einigen Figuren die Dicke in verschiedenen Richtungen gemessen.

War der Kreis dabei und erfüllt er die Eigenschaft in allen Richtungen die gleiche Dicke zu haben?

Skizziert euch einen Kreis und zeichnet seine Dicke in einer Richtung ein. Wie habt ihr diese Streckenlänge im Mathematik-unterricht genannt?

Der Kreis ist ein Gleichdick. Seine Dicke nennt man Durchmesser.



Seite 10 (Aufgabe 1, Simulation 3)

Nehmt euch noch mal die Räder (Doppelrollen) aus Experiment 1 zur Hand und überprüft, ob der „Radius“ der Räder in allen Richtungen gleich ist. Das könnt ihr mit bloßem Auge erkennen.

Was könnte dies zur Folge haben, wenn wir nun die Holzplatte auf die Achsen legen und hin und her bewegen?

Seite 13 (Aufgabe 2, Experiment 4)

Zählt die Anzahl der Ecken der regelmäßigen Vielecke.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Eckenanzahl und der „Kostruierbarkeit“?

Seite 14 (Aufgabe 2, Experiment 4)

Welche Eigenschaft erfüllt der Zirkel bei der Konstruktion eines Kreisbogens, bei der der Radius nicht verändert wird?

Da der Zirkel bei der Konstruktion eines Kreisbogens immer gleich weit geöffnet ist, haben alle Punkte des gezeichneten Kreisbogens denselben Abstand (Radius) zum Mittelpunkt.

Bei der Konstruktion in diesem Experiment wird die Zirkelnadel an drei Eckpunkten fixiert und jeweils mit gleichem Radius ein Kreisbogen konstruiert.

Ist die Figur also in allen Richtungen gleich dick?

Seite 15 (Aufgabe 3)

Wie lässt sich der Umfang eines Kreises mit Radius r berechnen?

Welchen Radius hat der Kreis auf Seite 15? (Nicht messen!)

In welchem Zusammenhang stehen der Kreisumfang und der Umfang des Reuleaux-Dreiecks? Könnt ihr daraus eine Formel für seinen Umfang ermitteln?

Für den Umfang eines Kreises mit Radius r gilt: $U_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot r$

Und da der Radius dieses Kreises gerade der Dicke des Reuleaux-Dreiecks entspricht, können wir auch schreiben: $U_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot d$.

Dabei ist wichtig, dass d die Dicke des Reuleaux-Dreiecks und nicht der Durchmesser des Kreises ist!

Überlegt euch, welchen Anteil des Kreisbogens des ganzen Kreises ihr mit den Kreisbögen des Reuleaux-Dreiecks auslegen könntet. Könnt ihr nun eine Formel für den Umfang des Reuleaux-Dreiecks angeben?

Mit den Kreisbögen des Reuleaux-Dreiecks könntet ihr den halben Kreisbogen des ganzen Kreises auslegen.

Wie müsst ihr die Formel für U_K also verändern, um eine Formel für den Umfang des Reuleaux-Dreiecks $U_{Reuleaux\text{-}Dreieck}$ zu erhalten?

Der Umfang eines Reuleaux-Dreiecks mit der Dicke d lässt sich mit dieser Formel berechnen:

$U_{\text{Reuleaux-Dreieck}} = \pi \cdot d$

Seite 16 (Aufgabe 3)

Löst euch von der Abbildung auf Seite 15.

In welchem Verhältnis stehen Radius und Durchmesser eines beliebigen Kreises?

Könnt ihr die Formel für den Umfang des Kreises $U_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot r$ so umformen, dass ihr nicht den Radius sondern den Durchmesser des Kreises direkt einsetzen könnt?

Die Formel für den Umfang eines Kreises mit Durchmesser d lautet: $U_{Kreis} = \pi \cdot d$

Kommt euch diese Formel bekannt vor?

Der Umfang eines Kreises mit Durchmesser d ist gleich dem Umfang des Reuleaux-Dreiecks mit der Dicke d.

Seite 19, Teil 1 (Aufgabe 4, Experiment 5)

Legt die drei Kreissektoren zu einem Halbkreis zusammen. Könnt ihr nun den Flächeninhalt berechnen?

Überlegt auch, warum sich hierbei auch wirklich ein Halbkreis ergibt.

Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r lässt sich mit dieser Formel berechnen:
$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$.

Welchen Flächeninhalt hat also der Halbkreis?

Der Flächeninhalt des Halbkreises und damit der Flächeninhalt der drei Kreissektoren lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$.

Und da der Radius des Halbkreises gleich der Dicke des Reuleaux-Dreiecks ist, ergibt sich:

$A_{3Kreissektoren} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2$.

Seite 19, Teil 2 (Aufgabe 4, Experiment 5)

Seht euch nochmals das Grundmuster eines Reuleaux-Dreiecks auf Seite 12 des Aufgabenheftes an. Wie könnt ihr die Folienausschnitte so übereinanderlegen, dass sich diese Form ergibt?

Seite 20, Teil 1 (Aufgabe 4, Experiment 5)

Um welche Art von Dreieck handelt es sich? Welche Kantenlänge haben die Dreiecke, wenn das zugehörige Reuleaux-Dreieck die Dicke d haben soll?

Wie könnt ihr den Flächeninhalt eines (beliebigen) Dreiecks berechnen?

Welche Information fehlt euch, um eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts aufstellen zu können, die nur von der Dicke des Reuleaux-Dreiecks abhängt?

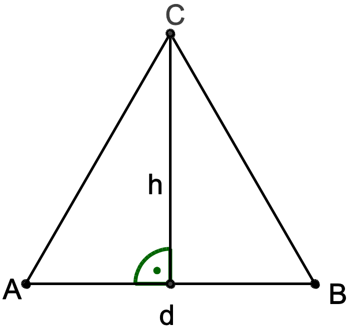
Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines beliebigen Dreiecks lautet: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ wobei g die Grundseite des Dreiecks und h die dazugehörige Höhe ist.

Welche der beiden Längen könnt ihr direkt angeben?

Berechnet die noch fehlende Länge.

Jede Seite des Dreiecks hat die gleiche Länge, nämlich d, also die Dicke des Reuleaux-Dreiecks.

Es fehlt euch noch die Höhe des Dreiecks. Wie könnt ihr sie berechnen?



Ihr könnt das gleichseitige Dreieck wie auf der letzten Seite abgebildet in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen und den Satz des Pythagoras anwenden. Ihr kennt die Hypothenusenlänge: d und eine Kathetenlänge: $\frac{1}{2}$ d, aber es fehlt euch noch die zweite Kathetenlänge h.

$$\Rightarrow d^2 = \frac{1}{4} d^2 + h^2$$

$$\Rightarrow h^2 = d^2 - \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} d^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4} d^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

Wie lautet nun eure Formel? Welcher Flächeninhalt war also „zu viel“?

Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines eurer gleichseitigen Dreiecke lautet:

$A_{GleichseitigesDreieck} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2$

Und da ihr diesen Flächeninhalt zweimal „zu viel“ gelegt habt:

$2 \cdot A_{GleichseitigesDreieck} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} d^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} d^2$

Seite 20, Teil 2 (Aufgabe 4, Experiment 5)

Auf Seite 19 des Aufgabenheftes habt ihr den Flächeninhalt der drei Kreisbögen und den Flächeninhalt der gleichseitigen Dreiecke, die ihr mehrfach gelegt habt berechnet.

Was müsst ihr mit diesen beiden Flächeninhalten machen, um den Flächeninhalt des Reuleaux-Dreiecks zu erhalten?

Ihr müsst den Flächeninhalt der gleichseitigen Dreiecke vom Flächeninhalt der Kreisbögen abziehen, daraus ergibt sich für den Flächeninhalt des Reuleaux-Dreiecks:

$$\begin{aligned} A_{\text{Reuleaux-Dreieck}} &= A_{\text{Halbkreis}} - 2\,A_{\text{GleichseitigesDreieck}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d^2 .- \frac{\sqrt{3}}{2}\, d^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) d^2 \end{aligned}$$

Seite 24 (Aufgabe 5, Experiment 6)

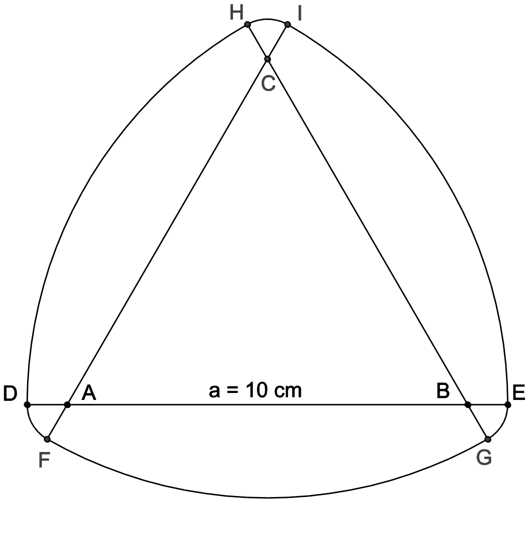
Zeichnet folgende Kreisbögen:

- Kreisbogen mit Mittelpunkt A und durch die Punkte E und I
- Kreisbogen mit Mittelpunkt B und durch die Punkte H und D
- Kreisbogen mit Mittelpunkt C und durch die Punkte F und G

sowie

- Kreisbogen mit Mittelpunkt A und durch die Punkte D und F
- Kreisbogen mit Mittelpunkt B und durch die Punkte E und G
- Kreisbogen mit Mittelpunkt C und durch die Punkte H und I

So sollte euer fertiges, abgerundetes Gleichdick aussehen:



Seite 25 (Aufgabe 5, Experiment 6)

Aufgrund der beschriebenen Konstruktion handelt es sich um ein Gleichdick. Es reicht also aus, die Dicke in einer Richtung anzugeben.

Die Dicke dieses abgerundeten Gleichdicks ergibt sich also z.B. aus der Summe der Länge der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{DA}$ und $\overline{BE}$ bzw. kurz d = $\overline{DE}$.

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“
Universität Koblenz-Landau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Roth
Fortstraße 7
76829 Landau

www.mathe-labor.de
www.mathe-ist-mehr.de

Zusammengestellt von:
Ahmet Kaya

Überarbeitet von:
Sebastian Schönthaler
Martin Dexheimer

Betreut von:
Prof. Dr. Jürgen Roth
Dr. Ralf Wagner

Veröffentlicht am:
25.05.2013