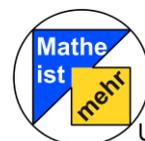




Station
„Figurierte Zahlen“
Aufgabenblätter





Mathematik-Labor

Station „Figurierte Zahlen“

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Was hat das Spielen mit Kieselsteinen mit Mathematik zu tun?

Nichts glaubt ihr?

Dann lasst euch in dieser Station eines Besseren belehren!

Im 6. Jhd. vor Christus spielten die Anhänger des Pythagoras mit Kieselsteinen: Sie legten mit den Steinchen regelmäßige Muster in den Sand und leiteten daraus viele mathematische Eigenschaften ab. Nicht ohne Grund stammt unser heutiges Wort „kalkulieren“ vom lateinischen Wort „calculus“ Kieselstein ab.

Wandelt in dieser Station auf den Spuren der Pythagoreer und entdeckt, was sie damals entdeckten.

Arbeitet bitte die folgenden Aufgaben der Reihe nach durch - bitte keine Aufgaben überspringen! Falls es mit der Zeit knapp wird, dann arbeitet trotzdem der Reihe nach weiter. Notfalls bearbeitet ihr die letzten Aufgaben nicht.

Falls ihr nicht wisst, wie ihr an eine Aufgabe herangehen sollt oder bei eurer Bearbeitung stecken bleibt, könnt ihr die Hilfestellungen (kleines Heft) nutzen. Wenn es zur jeweiligen Aufgabe eine Hilfestellung gibt, könnt ihr dies am Symbol  am Rand neben der Aufgabe erkennen. Nutzt diese bitte nur, wenn ihr sie auch benötigt!

Wenn eine Simulation zu einem Thema vorhanden ist und verwendet werden soll, könnt ihr das am Symbol  am Rand neben der Aufgabe erkennen.

Das Symbol  verweist darauf, dass hier mit einem gegenständlichen Modell gearbeitet werden soll.

Die Simulationen und weiterführende Informationen zum Thema eurer Laborstation, findet ihr auf der Internetseite des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ unter der Adresse www.mathe-labor.de oder www.mathe-ist-mehr.de.

Wir wünschen Euch viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Bekannte Rechenregeln?

Experiment 1



Material

- Holzplättchen in verschiedenen Formen

Hier das Foto des Materials einfügen.

Nehmt euch die Holzplättchen zur Hand.

Wie ihr sehen könnt, liegen zwei verschiedene Arten von Plättchen vor. Sie stehen stellvertretend für zwei unterschiedliche Klassen von Zahlen.

Versucht herauszufinden, um welche Klassen es sich handelt!

Die viereckigen Plättchen stellen die _____ Zahlen dar,
die restlichen Plättchen stehen für die _____ Zahlen.



Addition der Plättchen

Zum Ergebnis der Addition zweier Zahlen kann man Aussagen treffen, die **immer** gelten. Diese nennt man allgemeingültig.

Findet diese „Regeln“ selbst heraus, indem ihr die Plättchen zur Hilfe nehmt. Beachtet: Die Form zweier zusammengelegter Plättchen gibt euch Aufschluss über das Ergebnis.

Insgesamt gibt es 4 Möglichkeiten die Plättchen zu kombinieren.

Tragt diese in die folgende Tabelle ein und notiert euch das Ergebnis:

1. Plättchen: (gerade / ungerade Zahl?)	+	2. Plättchen: (gerade / ungerade Zahl?)	Ergebnis: (gerade / ungerade Zahl?)



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Bekannte Rechenregeln?

Haltet eure Erkenntnisse in Wortform fest:

Merksatz 1: Regeln der Addition zweier Zahlen

Bis jetzt habt ihr jeweils zwei Zahlen miteinander addiert. Doch was könnt ihr über die Summe von **mehreren** Zahlen sagen, wenn ihr sie der Größe nach addiert?

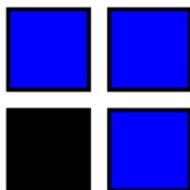
Experiment 2

Material

- Holzquader in zwei unterschiedlichen Farben

Hier das Foto des Materials einfügen.

Schaut euch folgende Abbildung, mit zugehöriger Rechnung, an:



$$1 + 3 = 4$$

Führt die Reihe fort, indem ihr die nächsten Summanden bestimmt.

Nehmt euch dazu die Holzwürfel zur Hilfe. Zeichnet die Muster (für jeden weiteren Summanden andere Farbe) in die freien Felder auf der nächsten Seite. Schreibt auch die dazugehörige Rechnung auf.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Bekannte Rechenregeln?

a)	b)
Rechnung:	Rechnung:
c)	d)
Rechnung:	Rechnung:

Diese Reihe könnt ihr unendlich lange fortsetzen.

Das Ergebnis der Addition mehrerer _____ Zahlen bildet sich immer nach dem gleichen Schema.

Formuliere zu dieser Regel einen Merksatz:

Merksatz 2: Regeln der Addition mehrerer _____ Zahlen





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Bekannte Rechenregeln?

Experiment 3

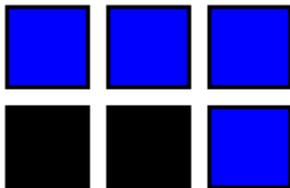


Material

- Holzquader in zwei unterschiedlichen Farben

Hier das Foto des Materials einfügen.

Schaut euch folgende Abbildung, mit zugehöriger Rechnung, an:



$$2 + 4 = 6$$

Hieraus könnt ihr schließen, dass es sich um das Addieren mehrerer
_____ Zahlen handelt.

Führt die Reihe fort, indem ihr die nächsten Summanden bestimmt.

Nehmt euch dazu die Holzwürfel zur Hilfe. Zeichnet die Muster (für jeden weiteren Summanden andere Farbe) in die freien Felder auf der nächsten Seite. Schreibt auch die dazu gehörige Rechnung auf.

a)	b)
Rechnung:	Rechnung:



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Bekannte Rechenregeln?

c)	d)
Rechnung:	Rechnung:

Diese Reihe könnt ihr auch unendlich lange fortsetzen.

Das Ergebnis der Addition mehrerer _____ Zahlen bildet sich immer nach dem gleichen Schema.

Formuliere zu dieser Regel einen Merksatz:

Merksatz 3: Regeln der Addition mehrerer _____ Zahlen

Schaut euch eure soeben gelegten Rechtecke nochmals an.
Wie groß sind die Flächen dieser Rechtecke, wenn 1 Würfelseite \triangleq 1 Einheit?

Rechteckfläche von a): _____

Rechteckfläche von b): _____

Rechteckfläche von c): _____

Rechteckfläche von d): _____

Somit sind die Flächengrößen immer _____ Zahlen.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 1: Bekannte Rechenregeln?

Im Hinblick auf die Multiplikation könnt ihr somit folgende Schlussfolgerungen ziehen:

Merksatz 4: Regeln der Multiplikation zweier Zahlen



I. Multipliziert man zwei aufeinander folgende Zahlen,
so ist das Ergebnis immer eine _____ Zahl.

Jede Multiplikation ist durch eine Addition darstellbar.
Benutzt diese Tatsache im Folgenden:

II. Multipliziert man zwei ungerade Zahlen,
so ist das Ergebnis immer eine _____ Zahl.

III. Multipliziert man zwei gerade Zahlen,
so ist das Ergebnis immer eine _____ Zahl.

In dieser Aufgabe habt ihr euch bekannte Rechenregeln der Addition und Multiplikation nur mit Holz-Plättchen und Holz-Quadern hergeleitet, wie die alten Pythagoreer.

Für die Bewältigung der folgenden Aufgaben benötigt ihr diese.

Falls ihr im weiteren Verlauf der Station einen Taschenrechner benötigt, findet ihr diesen auf dem Laptop, in der Menüleiste unten.

10 Minuten Pause!



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Im Folgenden lernt ihr die Dreieckszahlen kennen.

Experiment 4

Material

- Holzquader in zwei unterschiedlichen Farben

Hier das Foto des Materials einfügen.

Legt mit den Holzwürfeln ein gleichschenkliges Dreieck. Beginnt dazu mit einem Holzwürfel und zeichnet diesen links unten in die Tabelle ein:



Schraffiert jeweils ein Feld pro Würfel.

Nehmt weitere Würfel und bildet das nächstgrößere gleichschenklige Dreieck und fahrt damit fort. Zeichnet jede Vergrößerung in einer anderen Farbe ein.

Überprüft an dieser Stelle euer Ergebnis mit **Simulation 1**.



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Wie verändert das nächstgrößere Dreieck die Anzahl der gelegten Würfel?

Tragt ein:

Bei n-weiteren Würfeln	Anzahl der gelegten Würfel
$n = 1$	1
$n = 2$	
$n = 3$	
$n = 4$	
$n = 5$	

Merkt euch: Die Anzahl der gelegten Würfel ergibt eine Dreieckszahl!

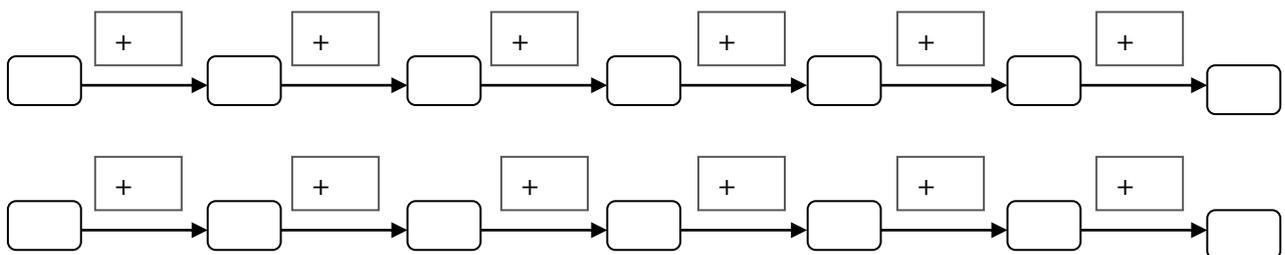
Schaut euch **Simulation 2** an. In dieser könnt ihr euch die ersten fünf Dreieckszahlen darstellen lassen!



Skizziert diese:

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5

Zählt die Kugeln und überträgt die Ergebnisse:





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Wie ihr seht ist eine Zahlenreihe entstanden. Wie könnte das zugehörige Bildungsgesetz für Dreieckszahlen lauten?

Dreieckszahlen besitzen ganz besondere Eigenschaften.
Um diese entdecken zu können, schreibt einige Glieder der Folge auf:

n	D
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Schreibt jeweils die letzte Ziffer der Dreieckszahlen auf:

Ab dem welchem D_n wiederholt sich die Folge der letzten Ziffern?

Entscheidet und begründet: Ist 412 eine Dreieckszahl?





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Durch die Folge der letzten Ziffern der Dreieckszahlen (D_n) habt ihr festgestellt, welche Zahlen keine Dreieckszahlen sein können.

Aber ihr könnt mit Hilfe dieser Regel, bei einer vorgegebenen Zahl, nicht sicher entscheiden, ob eine Dreieckszahl vorliegt oder nicht.

Eine Formel zur Berechnung der D_n müsste gefunden werden, um sicher zu urteilen.

Führt dazu folgendes Experiment durch:

Experiment 5

Material

- Holzquader in zwei unterschiedlichen Farben

Hier das Foto des Materials einfügen.

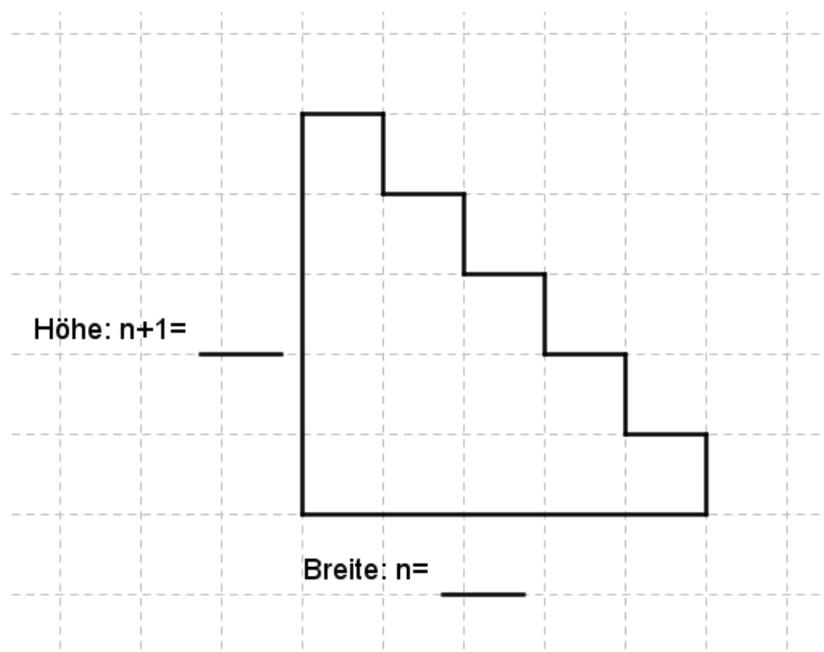
Legt zwei gleiche Dreiecke, mit Seitenlänge 5 Würfel.

Das eine sollte in Form einer aufsteigenden Treppe gelegt werden und das andere, mit einem kleinen Abstand, an der Hypotenuse gespiegelt davor.

Schiebt beide zusammen.

Welche geometrische Figur ergibt sich?

Vervollständigt die Skizze:





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Es entstand ein _____ (R_n).

Gebt den Flächeninhalt mit Hilfe einer Formel an:

(Als Hilfe könnt ihr gerne die Skizze auf der vorherigen Seite verwenden.)

$R_n =$

Verändert die Formel so, dass ihr damit den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmen könnt:

$D_n =$

Somit könnt ihr die Dreieckszahlen D_n mithilfe der obigen Formel berechnen, welche wir geometrisch hergeleitet haben.

Die Formel ist in der Mathematik als **Gaußsche Summenformel** bekannt. Den Ursprung des Namens lernt ihr gleich kennen.

Wenden wir diese Formel einmal an:

Stellt euch vor, ihr bekommt von eurem Lehrer die Aufgabe die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren.

Wie würdet ihr vorgehen?



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Die gleiche Aufgabe bekam Carl Friedrich Gauß als 9 jähriger Schüler von seinem Lehrer. Er kam in Windeseile, ohne schriftliche Zwischenrechnung, auf das Ergebnis 5050.

Habt ihr das gleiche Ergebnis? _____

Seine Strategie dafür: Schaffe konstante Teilsummen!

Dies schaffen wir durch kleinere Umformungen an der Formel D_n .

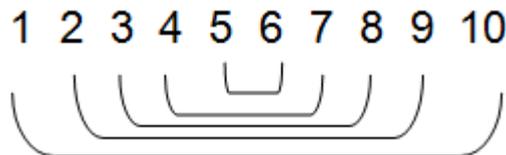
$$D_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Multipliziert beide Seiten mit 2:

Und schreibt das Ergebnis um, zu:

$$2D_n = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)$$

Für $n=10$ ergibt sich:



Somit ist die konstante Teilsumme _____, allgemein $n+1$ und

die Anzahl der Zahlenpaare _____, allgemein $\frac{n}{2}$.

Wie groß ist D_n ? _____



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Vielleicht ist euch aufgefallen, dass beide genannten Beispiele (100 und 10) gerade waren. Es könnte doch auch sein, dass die Summenformel für ungerade n plötzlich nicht mehr stimmt.

Experiment 6

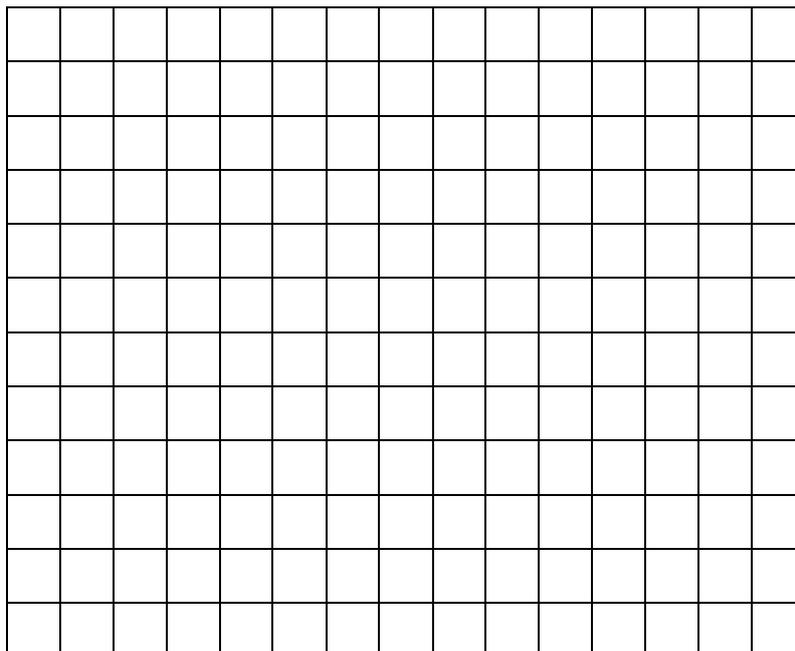
Material

- Holzquader in zwei unterschiedlichen Farben

Hier das Foto des Materials einfügen.

Versucht mit Hilfe der Holzwürfel für $n=7$ eine Antwort auf die Frage zu geben, ob die Summenformel für ungerade n auch gilt.

Skizziert hierzu eure Vorgehensweise in folgendem Raster:



Auf der nächsten Seite findet ihr die Möglichkeit auf arithmetischer Ebene zu argumentieren.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

Sei $n=7$.

Die konstante Teilsumme ist _____, allgemein $n+1$.

Die Anzahl der Zahlenpaare ist _____, allgemein _____.

Die übriggebliebene Zahl ist die _____, allgemein _____.

Gilt die Formel $D_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ auch für Dreieckszahlen mit ungeradem n ?
Beweist mithilfe einer Rechnung (Umformung):

Haltet eure Erkenntnisse über Dreieckszahlen in einem Merksatz fest:

Merksatz 5: Dreieckszahl

Anwendungen

a. Ist 22155 eine Dreieckszahl?





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 2: Dreieckszahlen

- b. Wie lautet die 9. Dreieckszahl? _____
- c. Wie lautet die 13. Dreieckszahl? _____
- d. Wie lautet die 101. Dreieckszahl? _____
- e) **Experiment 7**

Material

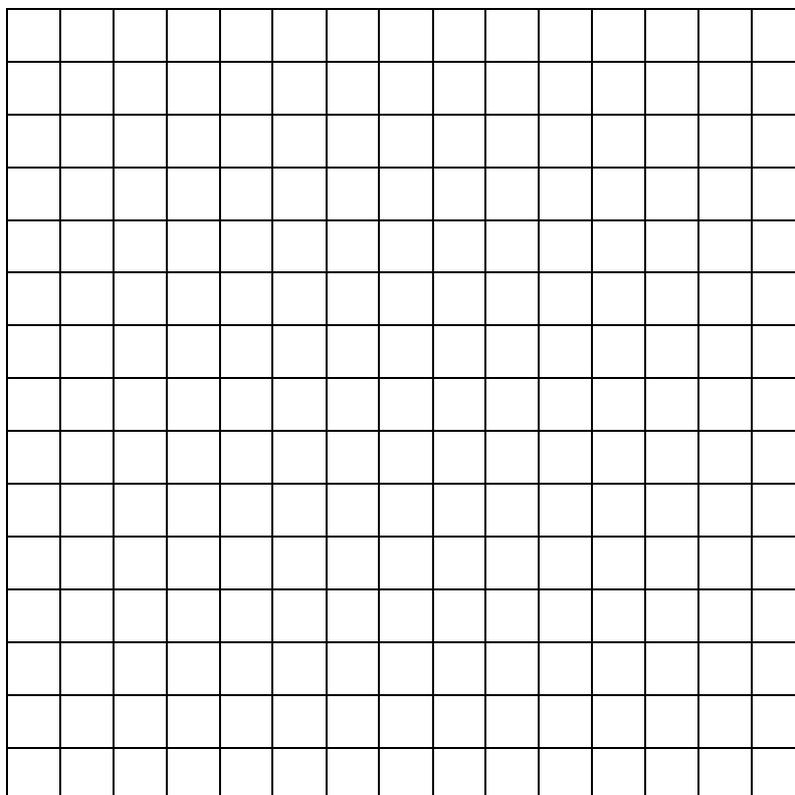
- Holzquader in zwei unterschiedlichen Farben

Hier das Foto des Materials einfügen.

Benutzt die Holzwürfel, um zu folgender Gleichung ein Punktmuster zu zeichnen:

$$3 \times D_5 + D_4 = D_{(2 \times 5)} = D_{10}$$

Es steht euch folgender Vorlage zur Verfügung (um die Übersicht zu bewahren, zeichnet mit verschiedenen Farben):



Überprüft eure Überlegungen mit Hilfe von **Simulation 3**.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 3: Quadratzahlen

Jeder muss in der Schule die Quadratzahlen bis 25 auswendig lernen. Doch wie erstellt man eine Quadratzahlreihe ohne Taschenrechner und ohne dass beim Multiplizieren der Kopf qualmt?

Quadratzahlen habt ihr bereits im Unterricht behandelt, sie entstehen, wenn man

Könnt ihr euch vorstellen, wie man Quadratzahlen mit den Holzwürfeln darstellt? Probiert es aus:

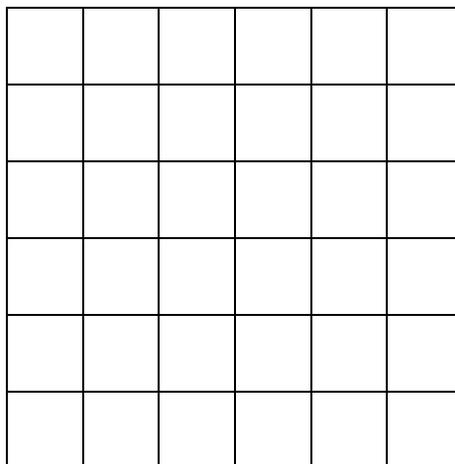
Experiment 8

Material

- Holzquader in zwei unterschiedlichen Farben

Hier das Foto des Materials einfügen.

Beginnt mit einem Stein in der Ecke unten, links und versucht Quadratzahlen darzustellen:



In **Simulation 4** und **Simulation 5** werden euch zwei Möglichkeiten gegeben. Schaut euch diese an und notiert sie:





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 3: Quadratzahlen

Es ist unerheblich, welche Variation ihr anwendet, die Quadrate werden nach demselben Muster aufgebaut. Welches ist das?



Tragt in die Tabelle der Reihe nach die Quadratzahlen bis zur 7. ein:
(Schreibt die Rechnung ausführlich in die Spalte „Rechnung“)

Rechnung:	Die Quadratzahl lautet:
1	1
1 + 3	4

Die 13. Quadratzahl ist: _____

Die 19. Quadratzahl ist: _____

Die n-te Quadratzahl ist: _____

Haltet eure Erkenntnisse über Quadratzahlen in einem Merksatz fest:

Merksatz 6: Quadratzahl





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 3: Quadratzahlen

Löst folgende Additionen (wie im Beispiel) mit Hilfe der **Simulationen 6 - 9**.

Beispiel: $D_1 + D_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

$$D_2 + D_3 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$D_3 + D_4 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$D_8 + D_9 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Habt ihr eine Vermutung über das Ergebnis der Addition zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen?

Um eure Vermutung zu überprüfen, reichen Beispiele nicht aus. Es könnte sein, dass diese für tausend Beispiele gilt, aber für eines nicht. Somit wäre die Aussage widerlegt.

Was wir brauchen ist ein mathematischer Beweis.

Diesen erarbeiten wir uns auf der nächsten Seite zusammen.





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 3: Quadratzahlen

Beweis:

Beginnt mit der Formel zur Berechnung von Dreieckszahlen:

[1] $D_n =$ _____

Eine Dreieckszahl (D_n) und die nächste Dreieckszahl (D_{n+1}):

[2] $D_{n+1} =$ _____

Addiert [1] und [2]:

[3] _____

Durch Vereinfachen ergibt sich:

[4] $\frac{1}{2} \cdot (n + 1)(n + (n + 2))$

Vereinfacht die hintere Klammer:

[5] _____

Zieht die 2 aus der hinteren Klammer und verrechnet diese mit $\frac{1}{2}$.

[6] _____

Schreibt das Ergebnis als Quadratzahl:

[7] _____

Somit habt ihr durch mathematische Umformungen allgemein gezeigt, dass das Ergebnis der Addition zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen immer eine Quadratzahl ist.



10 Minuten Pause!



Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 4: Rechteckzahlen

Schaut euch die **Simulationen 10 und 11** an und lernt die Rechteckzahlen kennen.

Was verbirgt sich eurer Vermutung nach hinter dem Begriff Rechteckzahlen?

Nach dem ____ Schritt hast du insgesamt 12 Steine im Rechteck gelegt.

Das heißt, die dritte Rechteckzahl ist die ____.

Legst du jetzt ____ Steine für die nächste Reihe dazu,

besteht dein Rechteck nun aus ____ Steinen.

So ist die ____ Rechteckzahl die ____.

Folglich erhält man Rechteckzahlen, indem man

Tragt in die Tabelle der Reihe nach die Rechteckzahlen bis zur 7. ein:
(Schreibt die Rechnung ausführlich in die Spalte „Rechnung“)

Rechnung:	Die Rechteckzahl lautet:
2	2
2 + 4	6





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 4: Rechteckzahlen

Die 9. Rechteckzahl ist: _____

Die 11. Rechteckzahl ist: _____

Die n-te Rechteckzahl ist: _____

Haltet eure Erkenntnisse über Rechteckzahlen in einem Merksatz fest:

Merksatz 7: Rechteckzahl





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 5: Zentrierte und dezentrierte Zahlen

Schaut euch **Simulation 12** an und vergleicht diese mit **Simulation 4**.

Welche Unterschiede stellt ihr fest?

Vergleicht **Simulation 13** mit **Simulation 2**.

Wie unterscheiden diese sich?

Ermittelt anhand der oben genannten Simulationen die Quadratzahl Q_2 und Q_5 und die zentrierten Quadratzahlen zQ_2 und zQ_5 (mit Rechnung):

Unterscheiden sich die Quadratzahlen von den zentrierten Quadratzahlen?





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 5: Zentrierte und dezentrierte Zahlen

Ermittelt anhand der eben genannten Simulationen die Dreieckszahlen D_3 und D_6 und die zentrierten Dreieckszahlen zD_3 und zD_6 (mit Rechnung):

Unterscheiden sich die Dreieckszahlen von den zentrierten Dreieckszahlen?

Haltet eure Erkenntnisse über zentrierte und dezentrierte Figuren hier fest:

Merksatz 8: Zentrierte und dezentrierte Figuren





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 6: Pool - Billard

Die bekannteste Version des Pool-Billard wird von 2 Spielenden mit 15 nummerierten Kugeln und dem weißen Spielball gespielt.

Die Nummern 1 – 7 sind die „ganzen“ oder „vollen“ und die Nummern 9 – 15 die „halben“. Die schwarze Kugel „8“ gilt es als letzte in eines der Löcher zu spielen, zuvor die eigenen 7.

Die Ausgangsaufstellung der 15 Kugeln beim Pool-Billard erfolgt in einem dreieckigen Rahmen. Die schwarze „8“ gehört dabei in die „Mitte“, d. h. die schwarze Kugel liegt von jeder Ecke gleichweit entfernt.

Experiment 9

Material

- Jonglierbälle
- Holzdreieck

Hier das Foto des Materials einfügen.

Baut die Ausgangsaufstellung beim Pool-Billard mit den Jonglierbällen in das Holzdreieck auf, die Nummerierung der Bälle ist nebensächlich.

Liegt die schwarze „8“ wirklich in der Mitte? Begründet eure Entscheidung:

Ändert den Aufbau so ab, dass die Kugel wirklich in der Mitte liegt. Wie müsst ihr vorgehen?





Station „Figurierte Zahlen“

Aufgabe 7: Orangenproblem

In dieser Aufgabe beschäftigt ihr euch nicht mehr mit figurierten Zahlen in der Ebene, sondern mit figurierten Zahlen im Raum.

Herr Gustav Bauer ist Obsthändler. Wie jeden Samstag fährt er auch heute wieder auf den Markt nach Landau, um sein Obst zu verkaufen.

Da der Verkauf letzte Woche sehr schleppend verlief, möchte Herr Bauer sein Obst heute anders präsentieren, um sich von den anderen Händlern abzuheben. Er überlegt sein Obst in geometrischen Figuren anzuordnen.

Da Herr Bauer leidenschaftlicher Billardspieler ist, möchte er seine Orangen in passender Form aufbauen:

Er legt eine dreieckige Grundform, analog der Ausgangsaufstellung beim Billard. Herr Bauer hat mehr als die dafür benötigten 15 Orangen. So überlegt er sich die Orangen übereinander zu stapeln. Die Grundform des Dreiecks möchte Herr Bauer beim Stapeln beibehalten.

Wie viele Ebenen kann Herr Bauer übereinander stapeln?

Wie viele Orangen sind in jeder Ebene und wie viele wurden insgesamt gestapelt?

Wie heißt die entstandene Figur? _____

Herzlichen Glückwunsch, ihr habt nun alle Aufgaben gelöst!



Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“
Universität Koblenz-Landau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Roth
Fortstraße 7
76829 Landau

www.mathe-ist-mehr.de
www.mathe-labor.de

Zusammengestellt von:
Lisa Deck, Sarah Hartenbach, Alexander Kaes, Alexandra Redeker

Überarbeitet von:
Sebastian Schönthaler

Betreut von:
Prof. Dr. Jürgen Roth