Station „Schaltalgebra“

Aufgabenblätter

Mathematik-Labor
Uni Koblenz-Landau

Mathematik-Labor

Station „Schaltalgebra“

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Habt ihr Euch schon einmal gefragt, wie ein Taschenrechner oder Computer rechnet? Warum zeigt ein digitaler Wecker immer die richtigen Zahlen an? Was steckte hinter den technischen Hilfsmitteln mit denen die erste Rakete 1957 ins Weltall geflogen ist?

Logische Verknüpfungen sind mathematische Hilfsmittel, die vielseitige Verwendung finden und in fast jedem elektrischen Gerät eine Rolle spielen. Ihr habt mit dieser Station die Möglichkeit, in etlichen Experimenten die Grundlagen rund um *logische Verknüpfungen* selbst zu entdecken.

Arbeitet bitte die folgenden Aufgaben der Reihe nach durch - bitte keine Aufgaben überspringen! Falls es mit der Zeit knapp wird, dann arbeitet trotzdem der Reihe nach weiter. Notfalls bearbeitet ihr die letzten Aufgaben nicht.

Falls ihr nicht wisst, wie ihr an eine Aufgabe herangehen sollt oder bei eurer Bearbeitung stecken bleibt, könnt ihr die Hilfestellungen (kleines Heft) nutzen. Wenn es zur jeweiligen Aufgabe eine Hilfestellung gibt, könnt ihr dies am Symbol am Rand neben der Aufgabe erkennen. Nutzt diese bitte nur, wenn ihr sie auch benötigt!

Wenn eine Simulation zu einem Thema vorhanden ist und verwendet werden soll, könnt ihr das am Symbol am Rand neben der Aufgabe erkennen.

Das Symbol verweist darauf, dass hier mit einem gegenständlichen Modell gearbeitet werden soll.

Die Simulationen und weiterführende Informationen zum Thema eurer Laborstation, findet ihr auf der Internetseite des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ unter der Adresse www.mathe-labor.de oder www.mathe-ist-mehr.de.

Wir wünschen Euch viel Spaß beim Experimentieren und Entdecken!

Das Mathematik-Labor-Team

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 1: Haustürklingel

Wenn ihr aufmerksam durch Landau lauft, könnt ihr feststellen, dass manche Häuser zwei Klingelschalter besitzen. Beide Schalter bedienen dennoch die gleiche Klingel. Wie ist das möglich? Das folgende Experiment wird euch Antwort auf diese und weitere Fragen geben.

Experiment 1: Haustürklingel

Material

- Modell
- Abdeckplatte

Betrachtet euch die Unterseite des Körpers durch die Plexiglasscheibe. Welche Bauteile kennt ihr? Schreibt diese auf.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 1: Haustürklingel

Legt das Modell mit der Plexiglasseite nach unten auf den Tisch, holt die Abdeckplatte aus der Hülle und setzt sie darauf. Vergleicht eure Bezeichnungen mit den von euch angegebenen.

Stellt eine Vermutung an **wie viele** und **welche** Kombinationen zum Drücken der Schalter es gibt.

Simulation 1

Startet „Simulation 1“ und **vergleicht** eure gefundenen Kombinationen mit den vorgegebenen.
WICHTIG: Füllt die Tabelle noch nicht aus.

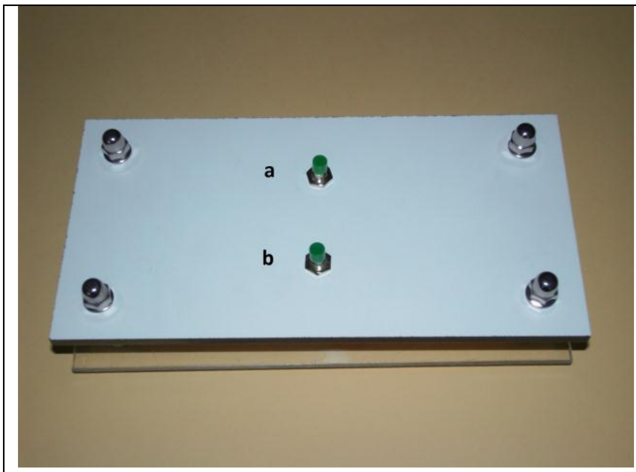
Lest bitte zuerst den gesamten Text. Füllt nun die Tabelle mit Hilfe des Modells aus. Geht die „Drückkombinationen“ der Reihe nach durch. Wenn alle 4 Felder ausgefüllt sind, zeigt die Simulation an, ob eure Lösung stimmt.

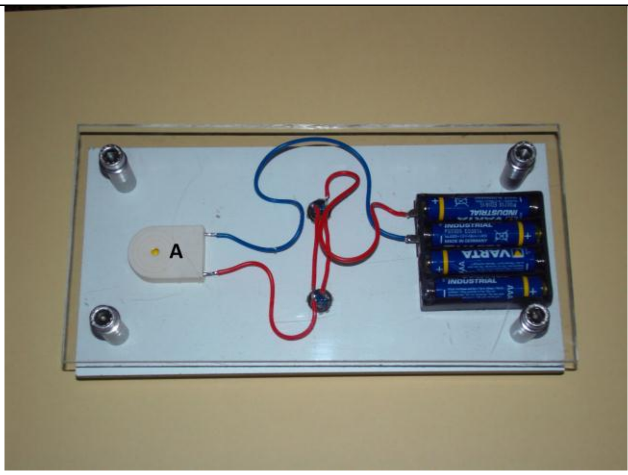
Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: ODER

Der Klingelschalter und die Klingel können verschiedene Zustände (gedrückt, nicht gedrückt, bzw. klingelt, klingelt nicht) annehmen, deshalb sind es **Variablen.** Hierbei gibt es folgenden Unterschied: Die Klingel ist abhängig von den Schaltern (Schalter 1 und Schalter 2). Daher nennen wir die Schalter **"Eingangsvariablen"** und die Klingel eine **"Ausgangsvariable"**. Bei Schaltungen ist eine Ausgangsvariable immer von einer oder mehreren Eingangsvariablen abhängig.

In Zukunft ersetzen wir die Eingangsvariablen durch **Kleinbuchstaben** (a, b, c,…), die Ausgangsvariablen durch **Großbuchstaben** (A, B, C). Außerdem könnt ihr die Felder der Tabelle mit "0" und "1" bezeichnen, um nicht ständig lange Wörter schreiben zu müssen.





Wenn ihr euch anseht, in welchen Fällen die Klingel (A) läutet, d.h. die Ausgangsvariable "A" den Wert "1" hat, stellt ihr fest:

Die Ausgangsvariable hat den Wert "1", wenn <u>die eine</u> oder <u>die andere</u> oder <u>beide</u> Eingangsvariablen den Wert "1" haben.

Um nicht ständig: "die eine oder die andere oder beide" sagen zu müssen, fassen wir uns kurz und sagen: "oder"

Das bedeutet: Die Klingel klingelt, wenn "Schalter 1" oder "Schalter 2" gleich "1" sind. Diese Formulierung beinhaltet: wenn "Schalter 1" gleich "1" ist, kann zur selben Zeit auch "Schalter 2" gleich "1" sein.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: ODER

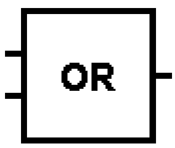
Simulation 2

Öffnet „Simulation 2“ und füllt die kürzere Tabelle erneut aus. Lest als erstes den Text. Zahlen müsst ihr **ohne** Anführungszeichen eingeben.

Wenn eine Ausgangsvariable von einer oder mehreren Eingangsvariablen abhängt, sprechen wir von einer **"Verknüpfung"**. In dieser Station handelt es sich **„logische Verknüpfungen“**.
In diesem Fall ist es die "ODER-Verknüpfung" (englisch: OR-Verknüpfung). Um nicht ständig "a oder b" schreiben zu müssen, gibt es dafür ein Zeichen: **v** (sprich: "oder")
Mit Hilfe dieses Zeichens kann man die passende Funktionsgleichung für die Klingel aufstellen:

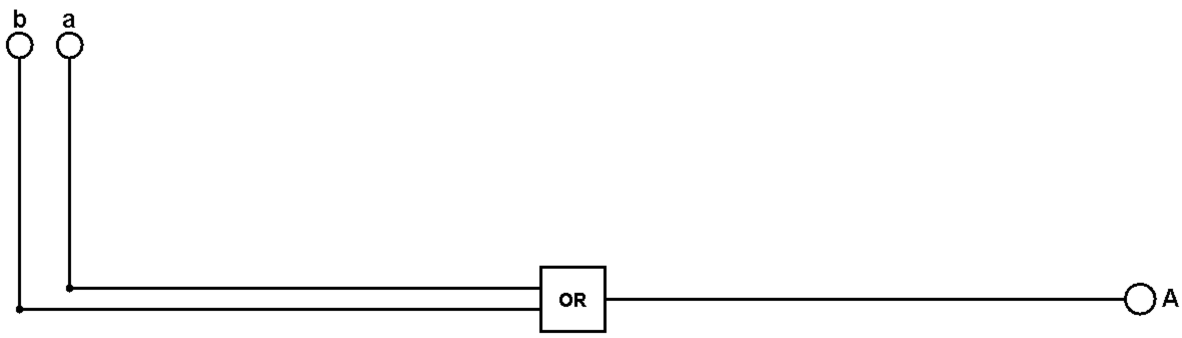
A = a **v** b (sprich: "A ist gleich a oder b")

Alle Funktionsgleichungen der Schaltalgebra kann man auch als Schaltbild zeichnen. Jede Verknüpfung hat ein Symbol. Für die ODER-Verknüpfung sieht es so aus:



ODER-Verknüpfung

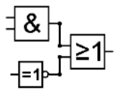
Mit diesem Symbol lässt sich die Schaltung für die obige Funktionsgleichung (A = a **v** b) folgendermaßen zeichnen:



Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: ODER

Simulation 3

Startet „Simulation 3“, drückt auf das  Symbol: und wählt „Öffnen“.

Baut die obige Schaltung nach, indem ihr mit linker Maustaste ein ODER-Glied auf den Bildschirm zieht und es richtig verbindet.

Sollte das Verbinden nicht klappen, werft einen Blick in das Hilfeheft.

Überprüft mit Hilfe der Simulation ob es sich wirklich um eine ODER-Verknüpfung handelt. Füllt die Tabelle mit Hilfe der „Simulation 3“ aus und vergleicht sie mit der Tabelle der ODER-Verknüpfung aus „Simulation 2“.

b	a	a ∨ b
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

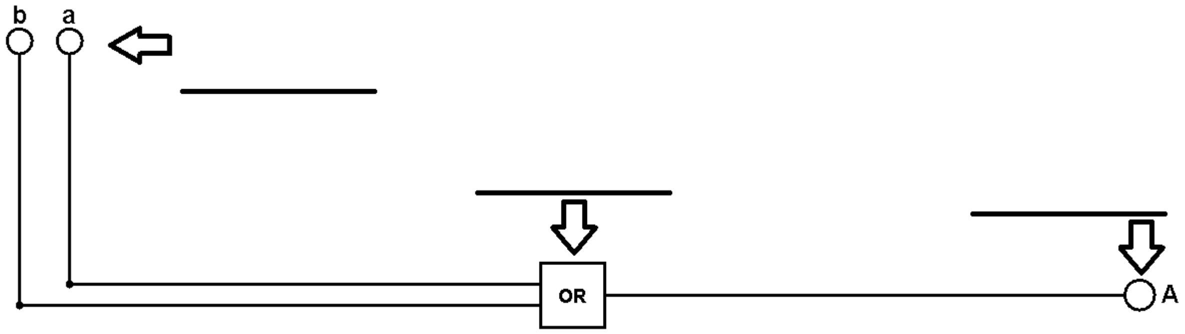
Die Eingangsvariablen "a" und "b" stehen auf "0“. Um sie auf "1" zu setzen müsst ihr sie mit der linken Maustaste anklicken. An den Farben der Verbindungslinien könnt ihr erkennen, ob sie ein „1-Signal“ (grün) oder ein „0-Signal“ (rot) führen.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: ODER

Beschriftet die Zeichnung mit den entsprechenden Begriffen.

Eingangsvariablen	Ausgangsvariable	logische Verknüpfung



Station „Schaltalgebra“

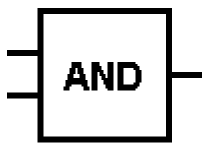
Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: UND

Nachdem ihr die ODER-Verknüpfung kennen gelernt habt folgt nun die UND-Verknüpfung.

Die Ausgangsvariable der **ODER-Verknüpfung** hat genau dann den Wert „1“, wenn die eine, die andere oder beide Eingangsvariablen den Wert „1“ haben.
Stellt eine Vermutung auf bei welcher/welchen Belegung(en) der Eingangsvariablen (a und b) die Ausgangsvariable (A) der **UND-Verknüpfung** den Wert „1“ hat.

Überprüft eure Vermutung mit der noch geöffneten „Simulation 3“:

Ersetzt den ODER- durch den UND-Baustein. Bausteine und Verbindungen könnt ihr mit Rechtsklick → „löschen“ entfernen.



UND-Verknüpfung

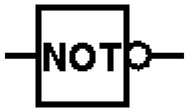
Um nicht alle Kombinationen aus "0" und "1" mit der Hand eingeben zu müssen könnt ihr "Simulation" → "Simuliere alle Eingangs-Belegungen" anwählen und mit dem Doppelpfeil nach rechts die einzelnen Kombinationen durchgehen.

Stellt die **Funktionsgleichung** für die UND-Verknüpfung auf. Verwendet dazu das entsprechende Symbol: $\wedge$ (sprich: und), sowie a, b als Eingangsvariablen und A als Ausgangsvariable.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: NICHT

Kommen wir zur letzten Verknüpfung: „NICHT“



Schaltsymbol der NICHT-Verknüpfung

"Die NICHT-Verknüpfung (englisch: NOT-Verknüpfung) liefert genau dann das Ausgangssignal "1", wenn das Eingangssignal "0" ist und umgekehrt."

Füllt die Tabelle anhand dieser Aussage aus.

a	A = ¬a

Dabei ist ¬a (sprich: nicht a) die "Negation von a".

Simulation 4

Startet „Simulation 4“ und überprüft eure Vermutung, indem ihr die Tabelle ausfüllt und mit eurer vergleicht.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: NICHT

Ein wichtiger Unterschied zwischen der NICHT- und den beiden UND- und ODER-Verknüpfungen ist die Anzahl der möglichen Eingänge. Finde mit Hilfe der **„Simulation 3“** heraus, wie viele Eingänge die NICHT-Verknüpfung maximal haben kann.

Formuliert euer Ergebnis als Satz.

Man kann nicht nur einzelne Variablen negieren, sondern auch ganze Terme:

Die Funktionsgleichung: $A = \neg(a \lor b)$ [sprich: nicht a oder b] kann zum Beispiel eine Anwendung beschreiben, die genau dann Alarm gibt, wenn die beiden Klimaanlagen „a“ und „b“ in einem Bürogebäude ausfallen.

Stellt eine Vermutung an, wie die Tabelle für den Term von A aussehen könnte. Füllt diese dann aus.

Simulation 5

Starte „Simulation 5“ und überprüft eure Vermutung indem ihr die Tabelle ausfüllt und mit eurer vergleicht.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: NICHT

Wenn Kinder im Holiday Park mit den Mini-Box-Autos fahren wollen, gelten zwei Bedingungen.
Bedingung a: Das Kind ist mindestens 90 cm groß.
Bedingung b: Das Kind ist mindestens 110 cm groß.
Es dürfen aber nur Kinder fahren (B), die folgender Funktion genügen:

B = a **∧** (¬b) [sprich: a und nicht b]

Entwerft eine Tabelle zu B.

Simulation 6

Überprüft eure Tabelle mit der „Simulation 6“.

Im nächsten Beispiel treten drei Eingangsvariablen auf: a, b und c.
Überlegt euch, wie viel unterschiedliche Möglichkeiten der Variablenbelegung (0,1) es gibt. Schreibt diese auf.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 2: Logische Verknüpfung: NICHT

Stellt eine allgemeingültige Formel auf, mit der man die Anzahl der Belegungsmöglichkeiten der Eingangsvariablen berechnen kann.

Da das Benutzen von Negationen in dieser Station des Mathe-Labors eine wichtige Rolle spielt, entwerft noch die Tabelle für folgende Schaltung:

$C = \neg((\neg a) \lor (b \land c))$

Simulation 7

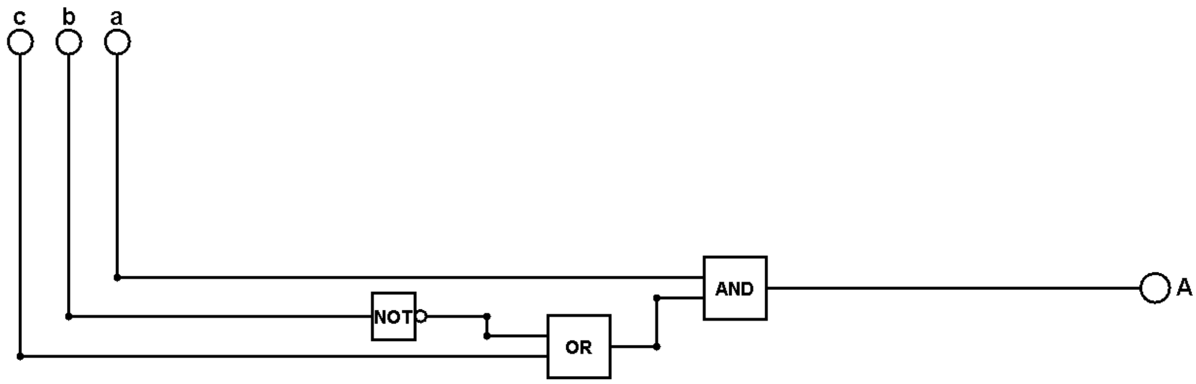
Überprüft eure Tabelle mit der „Simulation 7“.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 3: Grundlegende Methoden der Schaltalgebra

Bis jetzt habt ihr die drei logischen Grundverknüpfungen der Schaltalgebra kennen gelernt. Um sinnvoll mit ihnen arbeiten zu können oder um eigene Probleme mit ihrer Hilfe zu lösen, braucht ihr noch ein paar mathematische Werkzeuge, die ihr in diesem Kapitel erarbeitet.

Um verschiede Probleme zu lösen, braucht man verschiedene Herangehensweisen:
Im Raum der reellen Zahlen gilt: Bei gegebener Gleichung y=2x-1 könnt ihr den passenden Grafen in ein Koordinatenkreuz eintragen. Umgekehrt ist es möglich, von einem Grafen die passende Funktionsgleichung abzulesen.
In der Schaltalgebra geht das auch. Aus einem Schaltbild kann man die entsprechende Funktionsgleichung aufstellen.



Schreibt die zur Schaltung passende Funktionsgleichung auf. Solltet ihr keine Idee haben, ist in dem Hilfeheft eine Anleitung zum Finden der Lösung enthalten.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 3: Grundlegende Methoden der Schaltalgebra

Simulation 3

Baut in „Simulation 3“ die Schaltung nach, klickt mit der rechten Maustaste auf den Ausgang „**A**“ und wählt „**Term anzeigen**“. Vergleicht eure Ergebnisse. Dabei bedeuten: „!“ NICHT, „|“ ODER, & UND

Im Folgenden eine praktische Anwendungsaufgabe:

In Betrieben müssen zum Bedienen von gefährlichen Geräten Sicherheitsmaßnahmen ergriffen werden. Üblicherweise sind dies Knöpfe oder Lichtschranken. Die Firma, die die Schutzvorrichtung installieren soll, hat nur folgende Funktionsgleichung bekommen:

$A = [\,(a \wedge b) \vee (\,(\neg d) \wedge e)\,] \wedge (c)$

Dabei stellen die Variablen folgende Bedingungen dar:
a: linker Knopf ist gedrückt (damit der linke Arm nicht in die Maschine geraten kann).
b: rechter Knopf ist gedrückt.
c: Lichtschranke vor der Anlage; diese darf nicht durchschritten werden.
d: Lichtschranke weiter entfernt; wenn sie durchschritten ist, kann man die Maschine mit dem Knopf „e“ starten
e: Alternative Steuerung der Anlage.

A: Bedingung, die erfüllt sein muss, damit die Maschine schneidet.

Anmerkung zu den Lichtschranken:
Wenn sie nicht durchbrochen sind, haben sie den Zustand „1“. Sind sie durchbrochen, haben sie den Zustand „0“.

Die Firma benötigt aber einen Schaltplan. Eure Aufgabe ist es, diesen zu erstellen.
Nehmt dazu ein Blanko-Papier und zeichnet eure Schaltskizze auf.
(Achtung: den Kringel beim NICHT-Baustein zeichnen.)

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 3: Grundlegende Methoden der Schaltalgebra

Als nächstes lernt ihr, wie man aus einer gegebenen oder selbst entwickelten Tabelle die passende Funktionsgleichung und Schaltung erstellt.

c	b	a	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Erstellt die dazugehörige Schaltung mit der „Simulation 3“. Um Eingangsvariablen hinzuzufügen wählt "Variablen" → "Eingänge" → "hinzufügen".

Überprüft ob die Simulation auch wirklich mit der Wertetabelle übereinstimmt.

Um nicht alle Kombinationen aus "0" und "1" mit der Hand eingeben zu müssen könnt ihr "Simulation" → "Simuliere alle Eingangs-Belegungen" anwählen und mit dem Doppelpfeil nach rechts die einzelnen Kombinationen durchgehen.

Jetzt habt ihr ein Grundgerüst an Möglichkeiten und Hilfsmitteln erarbeitet, mit dem man viele Probleme der Schaltalgebra bearbeiten und lösen kann. Die nächste Aufgabe dauert etwas länger. Wenn ihr schon 2 Stunden am Arbeiten seid, solltet ihr jetzt die Pause einlegen. Wenn ihr euch noch konzentrieren könnt, macht die Pause nach der nächsten Aufgabe.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 4: Tunnelaufgabe

Tunnel müssen belüftet werden, sonst ist nach einer gewissen Zeit nicht mehr genug Sauerstoff zum Atmen in ihnen vorhanden. Stellt euch einen 5 km langen Tunnel mit drei Gebläsen vor:
Gebläse

a liefert 1500 l/m (l/m steht für: Liter (Luft) pro Minute)

b liefert 4500 l/m

c liefert 3000 l/m

Entwickelt ein Schaltnetz, welches ein grünes Signal (C) gibt, wenn mindestens 3000 l/m und höchstens 6000 l/m eingeblasen werden. Sobald mehr als 7500 l/m eingeblasen werden soll eine rote Signallampe (D) angehen.

Um euch Arbeit abzunehmen, ist die Struktur der Tabelle bereits vorgefertigt.

3000 l/m	4500 l/m	1500 l/m	Leistung insgesamt	Lampe grün	Lampe rot
c	b	a		C	D
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Ergänzt die Tabelle um die fehlenden Angaben.

Entwickelt eine zur Tabelle passende Schaltung.
Benutzt „Simulation 3“ oder zeichnet erst auf Blanko-Papier und übertragt dann in die Simulation.

Überprüft eure Schaltung indem ihr die Eingangsvariablen der Simulation mit denen der Tabelle **zeilenweise** vergleicht.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 4: Tunnelaufgabe

Überlegt, was mit dem Fall größer als 6000 l/m und kleiner als 7500 l/m ist. Warum wird er nicht aufgeführt?

Wenn ihr bis jetzt noch keine Pause eingelegt habt, ist jetzt ein guter Zeitpunkt dafür!

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Kann man eine Schaltung bauen, die die gleichen Ausgangswerte besitzt, aber weniger Verknüpfungen braucht?

Startet „Simulation 3“

Wählt unter dem Menüpunkt „Datei → Importiere Terme“ die Datei: „Vereinfachung der Tunnelaufgabe.lbf“
Fügt Eingang „a“ hinzu. (Variablen → Eingangsvariablen → Hinzufügen)

Füllt die Tabelle aus, dabei sind „A“ und „B“ **eure** Werte der Tunnelaufgabe und „C“ bzw. „D“ die der **Simulation**.
Achtung: der Eingang „a“ ist jetzt in der Mitte.

			Lampe grün	Lampe grün	Lampe rot	Lampe rot
c	b	a	C	A	D	B
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Vergleicht die Ausgangswerte „A“ und “C“ bzw. „B“ und “D“ zeilenweise. Was stellt ihr fest?

Station „Schaltalgebra"

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Mit der Definition:
"Wenn zwei Terme in jeder Zeile übereinstimmen, sind sie gleich."
könnt ihr euch Schreibarbeit sparen. Wie ihr eben selbst gemerkt habt, kann man die Schaltung für die Tunnelbelüftung groß und klein gestalten.
Mit wenigen Rechengesetzen könnt ihr die Funktionsgleichung der großen Schaltung in die der kleinen Schaltung umformen, dabei gilt: **"Die Schaltung, die weniger Bauteile hat, ist einfacher."**

Um die Funktionsgleichung umzuformen, benötigt ihr vier Rechengesetze.
Eure nächste Aufgabe besteht darin, diese vier selbst zu beweisen. Einige kennt ihr bereits aus der Schule, aber im Gegensatz zu ihnen gibt es in der Schaltalgebra alle Gesetze (mit einer Ausnahme) zweimal: einmal für die ODER- und einmal für die UND-Verknüpfung. Dabei sind sie zueinander **"dual"**.

Kommutativgesetze:
Aus der Schule kennt ihr bereits das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz):
$x + y = y + x$
in der Schaltalgebra lauten die zwei Kommutativgesetze:
$a \wedge b = b \wedge a$

[das duale Gesetz dazu: $a \vee b = b \vee a$]

Wie ihr seht, sind in der Gleichung die Variablen a und b vertauscht. Was bedeutet das für eine Schaltung? Stellt eine Vermutung an.

Überprüft eure Vermutung mit „Simulation 3".

Wählt „Datei → Term hinzufügen" und gebt den ersten Term folgendermaßen ein:

a **&** b

Wiederholt das gleiche für die rechte Seite des Gesetzes.

b **&** a

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Jetzt kennt ihr den Unterschied der beiden Seiten. Als nächstes müsst ihr das Gesetz **beweisen**.

Fülle zunächst die Tabelle aus:

b	a	$a \wedge b$	$b \wedge a$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Erinnert euch an die obige Aussage: **Wenn zwei Terme in jeder Zeile übereinstimmen, sind sie gleich**. D.h. ihr müsst zeilenweise vergleichen, ob die dritte und vierte Spalte übereinstimmen. Wenn dies der Fall ist, ist die Gleichung:

$\boxed{a \wedge b = b \wedge a}$

korrekt und das Gesetz ist in der Schaltalgebra bewiesen.

Eigentlich müsstet ihr noch das **duale Gesetz:**

$\boxed{a \vee b = b \vee a}$

beweisen, aber in der Schaltalgebra gibt es folgenden Satz:

„Wenn man bei einem bereits als gültig bewiesenen Gesetz der Schaltalgebra alle $\vee$ mit $\wedge$ und alle "**0**" und "**1**" vertauscht, erhält man ein neues gültiges Gesetz.

Wenn ihr möchtet, dürft ihr dasselbe erneut für das duale Gesetz mit den ODER-Verknüpfungen „$a \vee b = b \vee a$" beweisen.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Ein weiteres, aus der Schule bekanntes Gesetz, ist das **Distributivgesetz**: (Ausklammer-Gesetz)

$a \cdot (b + c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Schreibt **beide** Distributivgesetze der Schaltalgebra auf, beachte: hier kommen UND und ODER gleichzeitig in den Gesetzen vor.

Überprüft das Gesetz indem ihr die Tabelle ausfüllt und die letzten zwei Spalten zeilenweise vergleicht. Sind sie identisch, habt ihr das Gesetz bewiesen. Falls nötig könnt ihr „Simulation 3“ benutzen.

c	b	a		a	$b \wedge c$		$a \vee b$	$a \vee c$		$a \vee (b \wedge c)$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
0	0	0									
0	0	1									
0	1	0									
0	1	1									
1	0	0									
1	0	1									
1	1	0									
1	1	1									

Sollten die letzten zwei Spalten der Tabelle zeilenweise übereinstimmen, habt ihr das Gesetz bewiesen.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Das Distributivgesetz erlaubt es euch auszuklammern:

$x\,y\,z + x\,z + x = x \cdot (y\,z + z + 1)$ (in den reellen Zahlen)

$(a \land b \land \neg c) \lor (a \land b \land d) = (a \land b) \land (\neg c \lor d)$ (in der Schaltalgebra)

Dieses Gesetz ist sehr wichtig um Schaltungen zu vereinfachen, deshalb noch zwei Übungsbeispiele zum Lösen:

$(\neg a \land b \land \neg c) \lor (a \land b \land \neg c) =$

Tipp:
Bei der nächsten Gleichung müsst ihr zwei unterschiedliche Terme ausklammern:

$[a \land b \land c] \lor [(\neg a) \land (\neg b) \land c] \lor [a \land b \land (\neg c)] \lor [(\neg a) \land b \land c] =$

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Die nächsten zwei Gesetze nennt man **Komplementäre Elemente**:

Füllt die rechten Seiten der Gleichungen aus.

$a \wedge (\neg a) =$

$a \vee (\neg a) =$

Wendet die Gesetze auf die vorherige Aufgabe an und formt weiter um:

$(a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge (\neg b) \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge (\neg c)) \vee ((\neg a) \wedge b \wedge c)=$ Füllt das Feld auf der vorherigen Seite aus.

Das letzte fehlende Gesetz zum Vereinfachen der Tunnelaufgabe heißt:

Neutrale Elemente:

Überlegt, wie hier die rechten Seiten der Gleichung aussehen müssen.

$a \vee 0 =$

$a \wedge 1 =$

Formt die Gleichung der letzten beiden Aufgaben weiter um.

$(a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge (\neg b) \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge (\neg c)) \vee ((\neg a) \wedge b \wedge c)=$ Füllt das Feld auf der vorherigen Seite weiter aus.

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Tragt die von euch bewiesenen Gesetze in die entsprechenden Felder auf der rechten Seite ein.

Kommutativgesetze	
Distributivgesetze	
Komplementäre Elemente	
Neutrale Elemente	

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Mit den vier Gesetzen, die ihr bis jetzt bewiesen habt, kann man viele Gleichungen der Schaltalgebra vereinfachen. Um dies zu verdeutlichen, formt **eure Schaltung** für die Tunnelbelüftung in die **vorgegebene Schaltung** um:

Vermutlich hattet ihr die folgende Schaltung für die rote Lampe (falls nicht, bitte erst mit der hier aufgeführten weiterrechnen, danach könnt ihr eure Schaltfunktion der Tunnelschaltung noch verfeinern):

$B = ((\neg a) \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

Formt die Gleichung so um, dass kein “a” mehr in ihr enthalten ist. Nutzt dazu die bewiesenen Gesetze.

Startet „Simulation 3“, importiert erneut die Datei: „Vereinfachung der Tunnelaufgabe.lbf“, klickt mit der rechten Maustaste auf die Ausgangsvariable „B“ und wählt „Term anzeigen“.
Vergleicht euren Term mit dem angezeigten. Was fällt euch auf?

Station „Schaltalgebra“

Aufgabe 5: Rechengesetze der Schaltalgebra

Vermutlich hattet ihr diese Gleichung für die grüne Lampe.

$A = ((\neg a) \wedge b \wedge (\neg c)) \vee (a \wedge b \wedge (\neg c)) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge c) \vee (a \wedge (\neg b) \wedge c)$

Vereinfacht diese Gleichung.

$A = ((\neg a) \wedge b \wedge (\neg c)) \vee (a \wedge b \wedge (\neg c)) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge c) \vee (a \wedge (\neg b) \wedge c)$ $=$

Zeichnet das Schaltbild zur neuen Funktionsgleichung auf Blanko-Papier.

Vergleicht euer Schaltbild mit dem der Datei: „Vereinfachung zur Tunnelaufgabe“.

Mathematik-Labor „Mathe-ist-mehr“
Universität Koblenz-Landau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Roth
Fortstraße 7
76829 Landau

www.mathe-ist-mehr.de
www.mathe-labor.de

Zusammengestellt von:
Ulrich Kunz

Betreut von:
Prof. Dr. Jürgen Roth