



GeoGebra-Tag für Studienseminare 2023

Einstieg in die Differentialrechnung mit GeoGebra

Martin Dexheimer



• Workshopleitung

- Martin Dexheimer, StD
- GeoGebra Institute Trainer (seit März 2014)
- Lehrer (Ma, Sk, Inf, MuG), Organisationsleiter an der
- MaTeGnu-Multiplikator



(**M**athematik mit **T**echnologeeinsatz an **G**rundvorstellungen orientiert **n**achhaltig **u**nterrichten)

Link: <https://dms.nuw.rptu.de/mategnu>





- **GeoGebra-Institut Landau (RLP)**
 - Multiplikatoren-Netzwerk
 - nur drei Institute in D (weitere: Köln/Bonn, Würzburg)
- **GeoGebra-RLP-Wiki (<https://dms.nuw.rptu.de/geogebrainstitut>)**
 - Viele Lernvideos und Übungsaufgaben
 - Fortbildungsmaterialien (Suche: „Benutzer:M.Dexheimer“)





• Inhalte

- Grundvorstellungen zur Ableitung
- Vorüberlegungen zur Unterstützung durch GeoGebra
- Praxisbeispiele
- Technische Umsetzung
- Übungsphase
- Unterstützungshinweise



- **Inhalte**

- **Grundvorstellungen zur Ableitung**
- Vorüberlegungen zur Unterstützung durch GeoGebra
- Praxisbeispiele
- Technische Umsetzung
- Übungsphase
- Unterstützungshinweise

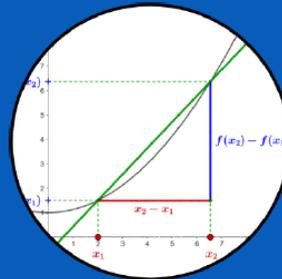
Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff



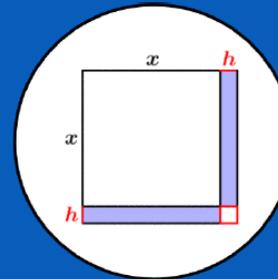
GeoGebra-Institut
Landau (RLP)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

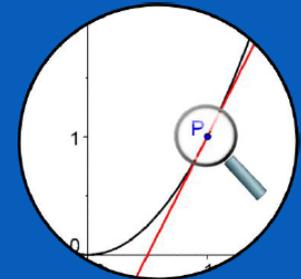

Lokale
Änderungsrate



Tangenten-
steigung



Verstärkungs-
faktor



lokale lineare
Approximation

Quelle: Roth, J.; Digel, S. (2023): „Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff“ aus einer GeoGebra-Lernumgebung zum Projekt MaTeGnu, verfügbar unter: <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/mxxhepef> [01.11.2023]

Ableitung als lokale Änderungsrate

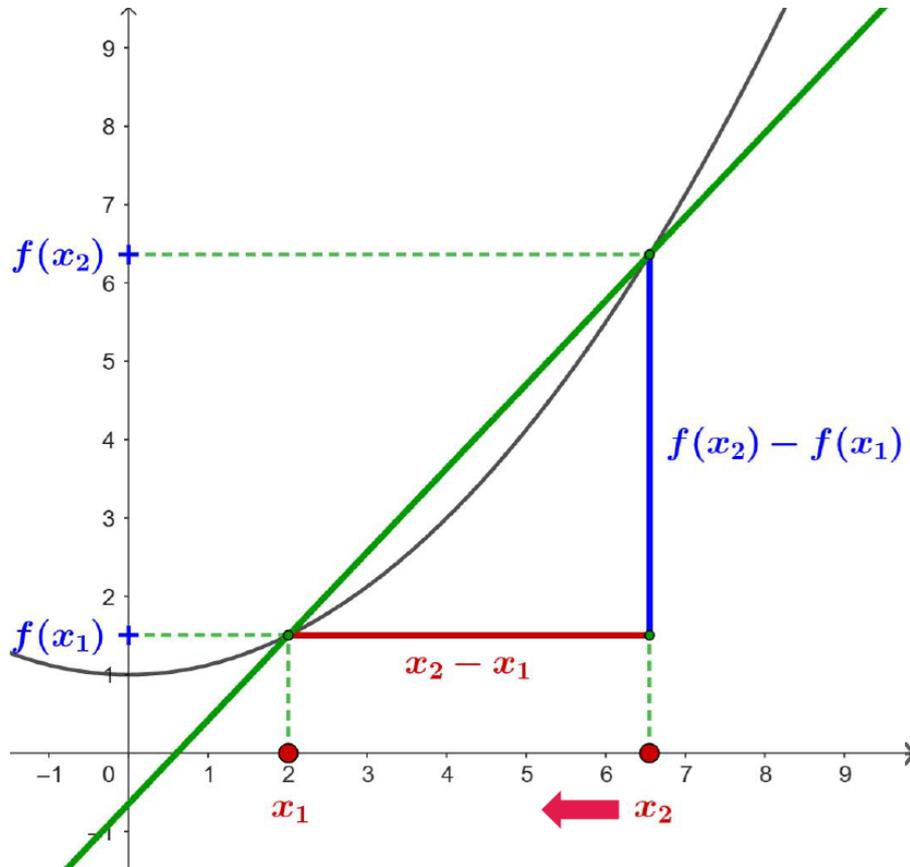


Formale Darstellung	Inhaltliche Erläuterung	
$f(x_0)$	Bestand	Bis zum Zeitpunkt x_0 zurückgelegter Weg.
$f(x) - f(x_0)$	absolute Änderung	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg.
$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	relative Änderung / (mittlere) Änderungsrate	In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg bezogen auf die Zeitspanne $x - x_0$. (Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[x_0, x]$)
$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	momentane / lokale Änderungsrate	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0 .



Quelle: Roth, J.; Digel, S. (2023): „Ableitung als lokale Änderungsrate“ aus einer GeoGebra-Lernumgebung zum Projekt MaTeGnu, verfügbar unter: <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/zsuvdmjc> [01.11.2023]

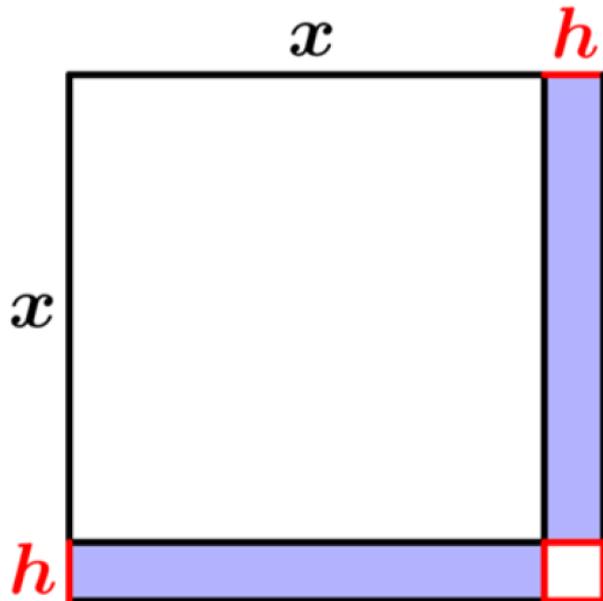
Ableitung als Tangentensteigung



- **Schritt 1**
Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P
- **Schritt 2**
Tangente als Grenzlage von Sekanten
- **Schritt 3**
Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Quelle: Roth, J.; Digel, S. (2023): „Ableitung als Tangentensteigung“ aus einer GeoGebra-Lernumgebung zum Projekt MaTeGnu, verfügbar unter: <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/uchduad4> [01.11.2023]

Ableitung als Verstärkungsfaktor

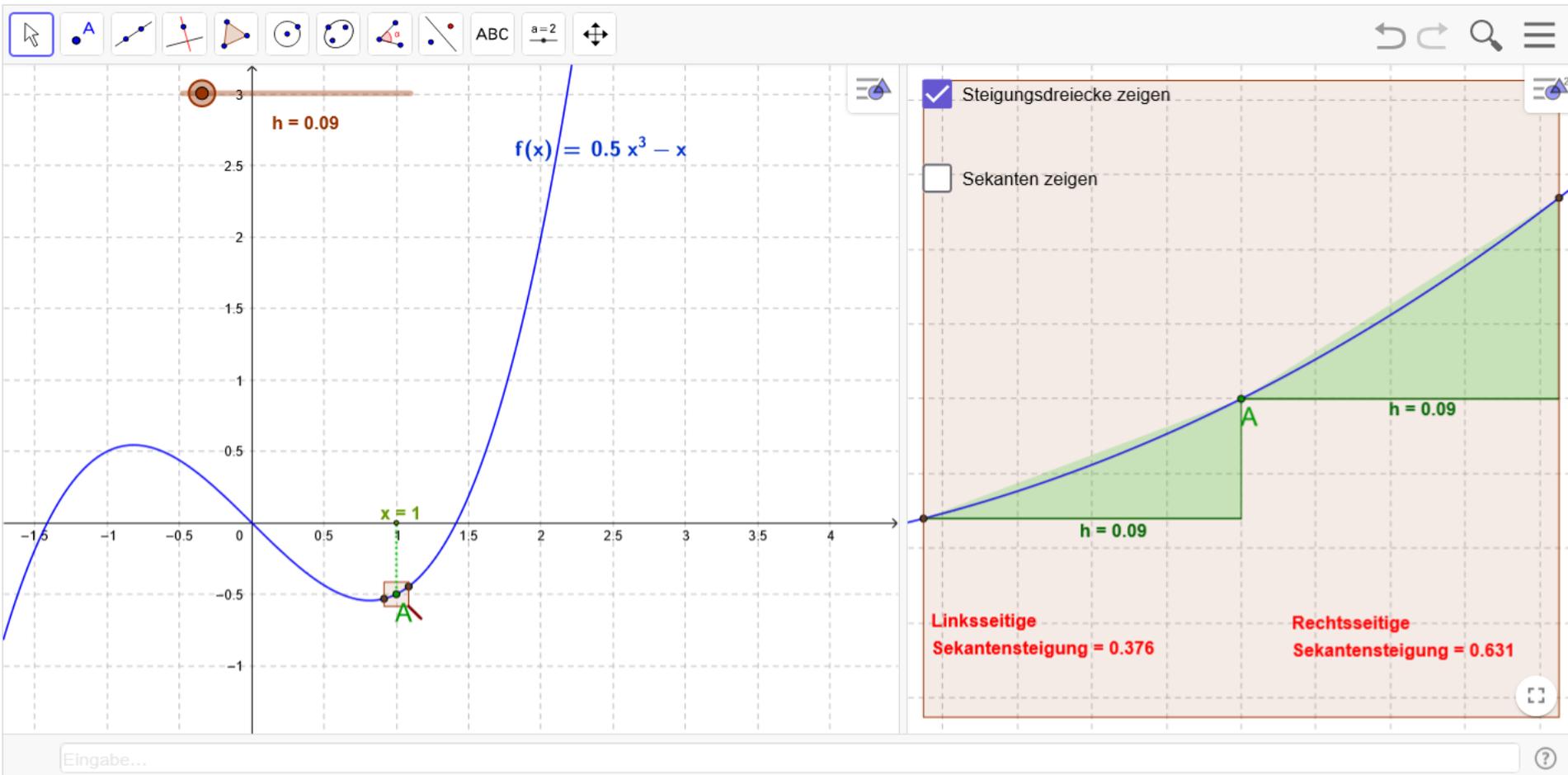


- Die Ableitung gibt an, wie stark sich die Änderung der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable auswirkt.
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderung der Funktionswerte.
- Für kleine Änderungen Δx gilt:

$$\begin{aligned}\Delta y &\approx f'(x) \cdot \Delta x \\ &= 2x \cdot h\end{aligned}$$

Quelle: Roth, J.; Digel, S. (2023): „Ableitung als Verstärkungsfaktor“ aus einer GeoGebra-Lernumgebung zum Projekt MaTeGnu, verfügbar unter: <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/cqdjax3m> [01.11.2023]

Ableitung als lokale lineare Approximation



Quelle: Roth, J.; Digel, S., A. Hilgers (2023): „Ableitung als lokale lineare Approximation“ aus einer GeoGebra-Lernumgebung zum Projekt MaTeGnu, verfügbar unter: <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/cqdjax3m> [01.11.2023]



• Inhalte

- Grundvorstellungen zur Ableitung
- **Vorüberlegungen zur Unterstützung durch GeoGebra**
- Praxisbeispiele
- Technische Umsetzung
- Übungsphase
- Unterstützungshinweise



Digitale Werkzeuge



sind **Universalwerkzeuge zur mathematischen Problemlösung** und müssen durch die Nutzer:in, durch geeignete Ausgestaltung, zu Spezialwerkzeugen für den jeweiligen Zweck gemacht werden.

Digitale Lernumgebungen



setzen einen **Rahmen für das selbstständige Mathematik-Lernen**. Dazu werden – häufig von Lehrpersonen – unter anderem Applets auf der Basis von digitalen Werkzeugen zur Unterstützung von selbstständigen Lernprozessen von Lernenden in die digitale Lernumgebung integriert.

Wann sollte was genutzt werden?

■ Digitales Werkzeug

Primäres Lernziel ist die Ausbildung von Nutzungsexpertise bzgl. des verwendeten digitalen Werkzeugs zur Problemlösung bzw. Aufgabenbearbeitung.

→ Die selbständige Nutzung des digitalen Werkzeugs ist sinnvoll.

■ Digitale Lernumgebungen

Primäres Lernziel besteht darin, einen mathematischen Inhalt zu durchschauen und zu verstehen.

→ Die Einbindung in eine digitale Lernumgebung ist sinnvoll.

Quelle: Roth, J.; Digel, S., A. Hilgers (2023): „Ableitung als lokale lineare Approximation“ aus einer GeoGebra-Lernumgebung zum Projekt MaTeGnu, verfügbar unter: <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/k9szjqkw> [01.11.2023]



- **Wie kann GeoGebra hierbei unterstützen?**
 - “Gibt es...? Wie verändert sich...? Ist das immer so...?”
 - Interaktivität von GeoGebra nutzen
 - Gefahr des „Erklären-Wollens“ unterbinden
 - gestufte Hilfen anbieten (Kontrollkästchen und bedingte Sichtbarkeit nutzen)
 - Beweisschritte anbieten, Argumentationen einfordern
 - Schieberegler als Schrittfolge nutzen, Arbeitsaufträge entsprechend gestalten



- **Idee zur Strukturierung einer Aufgabenstellung**

- 1) Hypothesen aufstellen lassen
- 2) Experimentieren „anstoßen“
- 3) „Sichtbares“ beschreiben und begründen
- 4) Reflektieren (Verifizieren/Falsifizieren der Hypothese)
- 5) Ergebnis dokumentieren

Vgl. Vollrath, H.-J.; Roth, J. (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, S. 220.



- **Inhalte**

- Grundvorstellungen zur Ableitung
- Vorüberlegungen zur Unterstützung durch GeoGebra
- **Praxisbeispiele**
- Technische Umsetzung
- Übungsphase
- Unterstützungshinweise



Link: <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3>





- **AB zur Näherung der momentanen Geschwindigkeit**

- <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/yfxh3pts>



- **AB zur Steigung einer Funktion**

- <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/bzakgmtg>



- **AB zum Graphischen Ableiten im MMS**

- <https://www.geogebra.org/m/cxcswcs3#material/nsur888n>





• Inhalte

- Grundvorstellungen zur Ableitung
- Vorüberlegungen zur Unterstützung durch GeoGebra
- Praxisbeispiele
- **Technische Umsetzung**
- Übungsphase
- Unterstützungshinweise



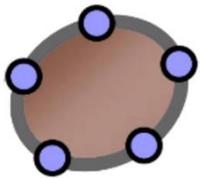
- (Schieberegler)
- Kontrollkästchen für bedingte Sichtbarkeit
- Auf Punktkoordinaten zugreifen
- Eingabefelder
- LaTeX-Ausdrücke
- Konstruktionsprotokoll verwenden



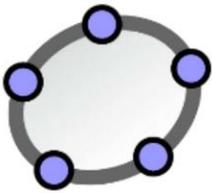
- **Inhalte**

- Grundvorstellungen zur Ableitung
- Vorüberlegungen zur Unterstützung durch GeoGebra
- Praxisbeispiele
- Technische Umsetzung
- **Übungsphase**
- Unterstützungshinweise

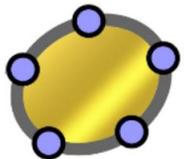
Rekonstruieren Sie das Applet zur Tangentensteigung:



Konstruktionsprotokoll nachvollziehen, selbständig rekonstruieren, Veränderungen vornehmen

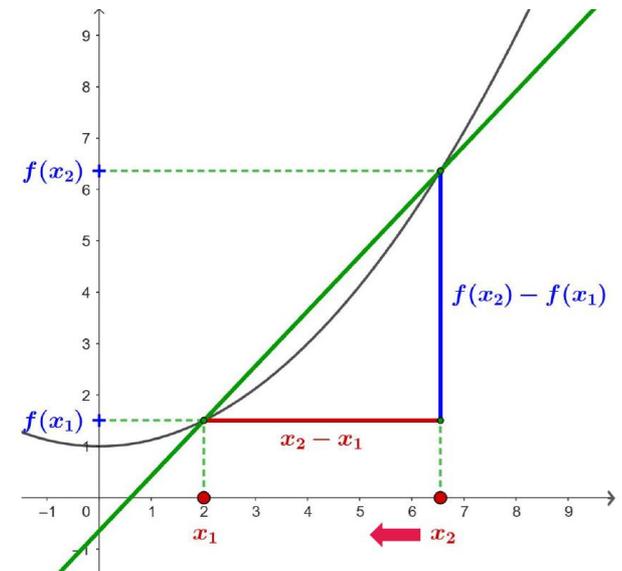


Selbständig Steigungsdreieck an Funktion konstruieren



Komplettes Applet selbständig rekonstruieren, inkl. Eingabe der abgelesenen Werte

Addon: AB erstellen, das SuS anleitet, das Applet teilweise selbständig zu konstruieren





- **Inhalte**

- Grundvorstellungen zur Ableitung
- Vorüberlegungen zur Unterstützung durch GeoGebra
- Praxisbeispiele
- Technische Umsetzung
- Übungsphase
- **Unterstützungshinweise**



- **GeoGebra Hilfe**

- Anleitungen: <https://wiki.geogebra.org/de/Anleitungen>
- Handbuch: <https://wiki.geogebra.org/de/Handbuch>
- Forum: <https://help.geogebra.org/>

- **Lernvideos (verwaltet vom GeoGebra Institut RLP)**

- Link:
 - <https://dms.nuw.rptu.de/geogebrainstitut/index.php/Lehr- und Lernvideos>
- Anfrage per Mail
 - an mich unter martin.dexheimer@web.de

Haben Sie Fragen?



GeoGebra-Institut
Landau (RLP)





**Vielen Dank für Ihre
Aufmerksamkeit!**